

Universidad
Rey Juan Carlos

Escuela Técnica Superior
de Ingeniería Informática

Grado en Matemáticas

Curso 2023-2024

Trabajo Fin de Grado

**INTRODUCCIÓN A LA TOPOLOGÍA ALGEBRAICA:
EL GRUPO FUNDAMENTAL Y HOMOLOGÍA
SIMPLICIAL**

Autor: Gonzalo Ortega Carpintero

Tutor: Pedro José Chocano Feito

Resumen

Este trabajo hace una breve introducción a la Topología Algebraica y la teoría de categorías. Para ello consta de un primer capítulo de preliminares en los que se introducen los conceptos de símplice, complejo simplicial y triangulaciones, aportando ejemplos y propiedades de los mismos.

Tras ello, se definen los conceptos de categoría y de functor para abordar el grupo fundamental, y los grupos de homología simplicial como ejemplos fundamentales de funtores para obtener invariantes topológicos de espacios punteados en el primer caso, y espacios triangulables en el segundo.

Palabras clave:

- Topología Algebraica
- Grupo fundamental
- Homología simplicial
- Teoría de categorías

Índice de contenidos

Índice de figuras	vii
Introducción	1
Objetivos	2
1. Preliminares	3
1.1. Símplices	4
1.2. Complejos simpliciales	7
1.3. Triangulaciones	13
1.4. Categorías	17
2. El grupo fundamental	20
2.1. Definiciones	21
2.2. Grupo fundamental de la circunferencia	23
2.3. Functorialidad del grupo fundamental	24
3. Homología en complejos simpliciales	26
3.1. Definiciones	27
3.2. Grupos de homología de superficies	31
3.3. Functorialidad de la homología	35
3.4. Invarianza topológica de los grupos de homología	37
Conclusiones	41
Bibliografía	42

Índice de figuras

1.1. Símplices de dimensiones bajas.	4
1.2. Cono entre un 2-símplice y un 0-símplice para formar un 3-símplice.	6
1.3. Complejo simplicial.	8
1.4. Estructuras que no forman un complejo simplicial.	8
1.5. Complejo simplicial del Ejemplo 4.	9
1.6. Triangulación de la esfera S^2	14
1.7. Triangulación del toro T^2	14
1.8. Triangulación del plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$	15
1.9. Círculo de Varsovia.	15
1.10. Los 20 círculos mas grandes del Pendiente Hawaiano.	16
2.1. Diagrama de la homotopía f_t entre dos caminos f_0 y f_1	21
3.1. Complejo simplicial orientado.	27
3.2. Complejo simplicial orientado de la esfera S^2	32
3.3. Subdivisiones baricéntricas.	38

Introducción

Hasta finales del siglo XIX la única parte de la topología que se entendía completamente, era la teoría de las variedades de dimensión 2. Por aquel entonces, el objetivo inicial de la Topología era encontrar invariantes numéricos, como los números de Betti, que permitieran clasificar variedades de cualquier dimensión.

De esta forma, las primeras investigaciones de el matemático francés, Henri Poincaré, estuvieron dirigidas a encontrar dichos invariantes numéricos desarrollando su teoría de homología, hasta que, en 1892, descubrió el grupo fundamental, llegando al nacimiento de la Topología algebraica de hoy en día. Poincaré introdujo el grupo fundamental π_1 en términos de caminos cerrados en una variedad, tal y como veremos en los preliminares de la Sección 2.1, estableciendo que es un invariante más discriminante que los números de Betti.

Más adelante, gracias a la revisión del matemático danés Poul Heegaard, Poincaré introdujo los números de torsión a su teoría de homología, que complementó con los números de Betti para poder diferenciar entre la esfera 3-dimensional S^3 y el plano proyectivo real $\mathbb{R}P^3$ para, en 1900, enunciar la que fue la primera conjetura de Poincaré: *toda variedad de dimensión 3 con homología trivial es homeomorfa a S^3* . Pasaron cuatro años hasta que Poincaré realizó la construcción de la esfera homológica, una variedad de dimensión 3 con la misma homología de S^3 , pero con diferente π_1 . Este contraejemplo desmanteló la conjetura anterior y dio paso al nacimiento de la verdadera conjetura de Poincaré: *toda variedad de dimensión 3 cerrada con π_1 trivial es homeomorfa a S^3* . Para profundizar más en el planteamiento de la conjetura de Poincaré, en su desarrollo por sus sucesores y en el nacimiento de la Topología algebraica se puede consultar [1]. En el año 2000, la conjetura de Poincaré fue propuesta como uno de los problemas del milenio y no fue hasta 2003, casi un siglo después de que Poincaré la enunciara, cuando el ruso Grigori Perelmán demostró la conjetura siguiendo un programa estipulado en 1982 por el estadounidense Richard Hamilton.

Poincaré nunca reconoció la existencia de grupos de homología ya que los números eran el invariante topológico más deseado por las matemáticas de entonces. Sin embargo, como veremos en la Sección 3.1, estos son la forma de empaquetar los números de Betti y los números de torsión actualmente.

Objetivos

El objetivo principal de este Trabajo de Fin de Grado es dar una introducción general a la Topología Algebraica y dar la intuición y demostraciones necesarias para que un lector primerizo en la materia, con conocimientos básicos de Topología y Álgebra, pueda entender fácilmente todos los conceptos.

Para alcanzar el objetivo principal se han seguido la siguiente serie de objetivos secundarios:

- Introducir las estructuras necesarias para poder formalizar los grupos de homología simpliciales.
- Formalizar el concepto de categoría matemática y de funtores para tratar las transformaciones de morfismos entre distintas categorías.
- Definir el grupo fundamental como el grupo de bucles de caminos que parten y llegan al mismo punto de un espacio.
- Definir los grupos de homología como el cociente de los grupos de cadenas formadas por los núcleos y las imágenes del operador frontera sobre los complejos simpliciales formados por triangulaciones de espacios topológicos.
- Aportar ejemplos tanto del grupo fundamental como de los grupos de homología para facilitar la comprensión de los mismos.

1

Preliminares

Existen varias formas de definir los grupos de homología. La primera de ellas es hacerlo sobre estructuras simples denominadas complejos simpliciales, formadas por triángulos n -dimensionales. Esto hace que sea sencillo entender el concepto y realizar cálculos computacionales.

En este primer capítulo se abordan las nociones básicas que un lector con conocimientos elementales en Topología y Álgebra necesitará para tener todas las herramientas necesarias para poder definir los grupos de homología. Las Secciones 1.1 y 1.2 tratan sobre los símlices y los complejos simpliciales, piezas básicas en la construcción de la homología simplicial. La Sección 1.3 introduce el concepto de triangulaciones, los homeomorfismos necesarios para poder transformar un espacio topológico con propiedades lo suficientemente *buenas* en complejos simpliciales y así poder más adelante calcular su grupo de homología. Finalmente, en la Sección 1.4 se dará una breve introducción a la teoría de categorías, que a día de hoy es fundamental para comprender la Topología Algebraica.

Las dos primeras secciones están basadas principalmente en las dos primeras secciones del Capítulo 1 de [2]. Las dos siguientes utilizan el contenido desarrollado en los Capítulos 1 y 3 de [3]

1.1. Símplices

Para poder tratar con propiedad los complejos simpliciales es necesario definir primero las piezas por las cuales están compuestos, los símplices. Estos son una generalización del concepto de triángulo para n dimensiones, y pueden ser vistos como la envolvente convexa de un conjunto de $n + 1$ puntos geoméricamente independiente que forme un espacio de dimensión n .

Definición 1.1.1. Se dice que un conjunto $\{a_0, \dots, a_n\}$ de \mathbb{R}^n es **geoméricamente independiente** si para cualquier conjunto de coeficientes reales t_i , las ecuaciones

$$\sum_{i=0}^n t_i = 0 \text{ y } \sum_{i=0}^n t_i a_i = 0$$

implican $t_0 = t_1 = \dots = t_n = 0$.

Definición 1.1.2. Sea $\{a_0, \dots, a_n\}$ un conjunto geoméricamente independiente de \mathbb{R}^n . Definimos un **n-símplice** σ generado por a_0, \dots, a_n como el conjunto de todos los puntos x de \mathbb{R}^n que cumplen que

$$x = \sum_{i=0}^n t_i a_i \text{ donde } \sum_{i=0}^n t_i = 1$$

y $t_i \geq 0$ para todo i . Los números t_i son las **coordenadas baricéntricas** del punto x de σ respecto a a_0, \dots, a_n .

Ejemplo 1. Es sencillo visualizar geoméricamente n -símplices de dimensiones bajas, siendo un 0-símplice un punto, un 1-símplice un segmento, un 2-símplice un triángulo y un 3-símplice un tetraedro, como se muestra en la Figura 1.1.

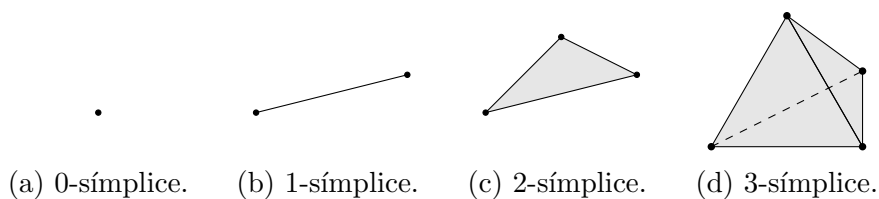


Figura 1.1: Símplices de dimensiones bajas.

En la siguiente proposición enunciamos y demostramos la afirmación del ejemplo anterior de manera más general. Para ello, y de ahora en adelante, sea P el n -plano determinado por el conjunto de puntos geoméricamente independientes $\{a_0, \dots, a_n\}$, siendo σ el n -símplice generado por dichos puntos. Dado un $x \in \sigma$, denotamos $t_i(x)$ al conjunto de coordenadas baricéntricas de x , determinado de forma única por

$$x = \sum_{i=0}^n t_i a_i \text{ con } \sum_{i=0}^n t_i = 1.$$

Proposición 1.1.1. *El n -símplice σ equivale a la unión de todos los segmentos que unen a_0 con cada uno de los puntos del $(n-1)$ -símplice s generado por a_1, \dots, a_n . Además, cada par de estos segmentos se cruzan únicamente en el punto a_0 .*

Demostración. Usando inducción, el caso base para $n = 1$ es el 1-símplice generado por a_0 y a_1 , que está formado por los puntos x_1 de la forma

$$x = t_0 a_0 + t_1 a_1 \quad \text{donde} \quad t_1 + t_0 = 1, \quad t_0, t_1 \geq 0,$$

luego $x = t_0 a_0 + (1 - t_0) a_1$, con $0 \leq t_0 \leq 1$, que son los puntos del segmento que une a_0 con a_1 .

Asumiendo como verdadero el caso general, se tendría que dado un n -símplice σ , este está formado por los puntos de la forma

$$x_n = \sum_{i=0}^n t_i a_i = t_0 a_0 + (1 - t_0) \left(\sum_{i=1}^n \frac{t_i}{1 - t_0} a_i \right)$$

para $t_0 \neq 1$. Esto significa que el sumatorio es un punto del $(n-1)$ -símplice formado por los puntos a_0, \dots, a_n , ya que los puntos $x_n \in \sigma$ están contenidos en segmentos que unen a_0 con s . Para $t_0 = 1$ se tendría que $\forall i > 0, t_i = 0$, luego $x = a_0$. Así pues, para $n + 1, t_0 \neq 1$, se tendría

$$x_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} t_i a_i = t_0 a_0 + (1 - t_0) \left(\sum_{i=1}^n \frac{t_i}{1 - t_0} a_i + \frac{t_{n+1}}{1 - t_0} a_{n+1} \right).$$

Denotando p al contenido del paréntesis grande, de la misma forma que antes, suponiendo $t_{n+1} \neq 0$, y denotando $\lambda = \frac{t_{n+1}}{1 - t_0}$ tendríamos que

$$p = \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{1 - t_0} a_i + \lambda a_{n+1} = \lambda a_{n+1} + (1 - \lambda) \left(\sum_{i=1}^n \frac{t_i}{\lambda(1 - t_0)} a_i \right).$$

Por tanto, por la hipótesis de inducción, p es un punto en el segmento entre a_{n+1} y el símplice formado por los puntos a_1, \dots, a_n . Luego x_{n+1} pertenece a un segmento entre a_0 y el símplice formado por los puntos a_1, \dots, a_{n+1} como queríamos demostrar. \square

Definición 1.1.3. La construcción clásica en matemáticas conocida como *join* une cada uno de los puntos de un espacio X con todos los demás puntos de otro espacio Y formando un nuevo espacio. Para subconjuntos de \mathbb{R}^n , se denota el **join** de X con Y como

$$X * Y = \{tx + (1 - t)y \mid x \in X, y \in Y, t \in [0, 1]\}.$$

En el caso particular de que uno de los espacios sea un único punto, la operación *join* se denomina **cono**. Tomando conjuntos de cardinal uno e iterando la operación cono, se pueden construir símlices siguiendo la estructura de la Proposición 1.1.1. Dos puntos se unen formando un segmento, el segmento resultante se une con un tercer punto formando un triángulo, con un cuarto un tetraedro, y así sucesivamente.

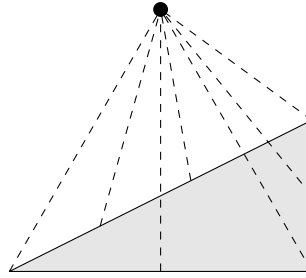


Figura 1.2: Cono entre un 2-símplice y un 0-símplice para formar un 3-símplice.

Definición 1.1.4. Definamos ahora algunos de los elementos básicos de los símlices:

1. Los puntos a_0, \dots, a_n que generan σ son los **vértices** de σ .
2. La **dimensión** de un símlice es uno menos que el numero de vértices que lo forman.
3. Cualquier símlice generado por un subconjunto de $\{a_0, \dots, a_n\}$ distinto de el propio σ es una **cara** de σ .
4. La unión de las caras de un símlice es su **frontera**, y se denota $\text{Bd } \sigma$.
5. El **interior** de un símlice σ se define como $\text{Int } \sigma = \sigma - \text{Bd } \sigma$.

Proposición 1.1.2. *Sea σ un símlice. Entonces σ es un conjunto compacto y convexo en \mathbb{R}^n que equivale a la intersección de todos los conjuntos convexos A de \mathbb{R}^n que contengan a $V = \{a_0, \dots, a_n\}$.*

Demostración. Consecuencia directa de la Proposición 1.1.1 es que σ es cerrado y acotado, luego por el Teorema de Heine-Borel, σ es compacto. Además, como σ está formado por la unión de segmentos de cada uno de sus vértices a cada una de sus caras opuestas, dados dos puntos cualesquiera de σ , el segmento que los une está completamente contenido en σ , luego se tiene que σ es convexo.

Si σ no perteneciera a la intersección significaría que existe cierto $A \supseteq V$ convexo tal que $A \subsetneq \sigma$. Por tanto, existe al menos un punto $x \notin V$ que cumple que $x \in \sigma$ pero $x \notin A$. Como $x \in \sigma$, renombrando los vértices como sea necesario para hacerlos coincidir con la Proposición 1.1.1, existe cierto punto p perteneciente

a la cara generada por a_1, \dots, a_n tal que x pertenece al segmento que une a_0 con p . Por tanto, si $x \notin A$, a_0 y p no podrían estar unidos por un segmento y A no sería convexo, llegando a una contradicción, luego

$$\sigma \subseteq \bigcap_{\substack{A \text{ convexo} \\ V \subseteq A}} A.$$

Si la inclusión inversa no fuera cierta significaría que todo conjunto convexo que contenga a V tiene al menos un punto que no puede expresarse de la forma

$$x = \sum_{i=0}^n t_i a_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^n t_i = 1.$$

Pero hemos visto que σ está contenido en la intersección, y σ no tiene ningún punto que no cumpla lo anterior, por lo que tendríamos otra contradicción y ha de cumplirse

$$\sigma \supseteq \bigcap_{\substack{A \text{ convexo} \\ V \subseteq A}} A.$$

□

1.2. Complejos simpliciales

Una vez definidos y analizados los símlices, hay dos formas diferentes de definir los complejos simpliciales. La primera de ellas es la definición geométrica, que es de utilidad para ganar intuición sobre la forma en la que los símlices se unen entre si.

Definición 1.2.1. Se dice que un **complejo simplicial** K de \mathbb{R}^n es una colección de símlices en \mathbb{R}^n que cumplen que:

1. Toda cara de un símlice en K está contenida también en K .
2. La intersección de dos símlices cualesquiera de K es una cara de cada uno de ellos.

Ejemplo 2. En la Figura 1.3 tenemos un complejo simplicial formado por un 2-símlice, seis 1-símlices y seis 0-símlices.

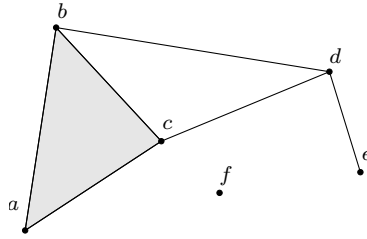


Figura 1.3: Complejo simplicial.

Ejemplo 3. En la Figura 1.4, la estructura de la izquierda está formada por un 2-símplice, tres 1-símplices y tres 0-símplices. Sin embargo, le faltaría contar con un 1-símplice y un 0-símplice más para que todas las caras de sus símplexes estuvieran contenidas en sí mismo. La figura de la derecha está formada por la intersección de dos 2-símplices en la cual las partes en común no forman una cara de ninguno de ellos.



Figura 1.4: Estructuras que no forman un complejo simplicial.

Definición 1.2.2. Si L es una subcolección de K que contiene todas las caras de sus elementos, entonces L es también un complejo simplicial y se denomina **subcomplejo** de K .

Definición 1.2.3. El subcomplejo de K es la colección de todos los símplexes de K de dimensión menor o igual a n es denominado **n-esqueleto** de K y denotado $K^{(n)}$. Los puntos de la colección $K^{(0)}$ son los **vértices** de K .

Definición 1.2.4. Para definir una topología en un complejo simplicial K denotaremos $|K| \subset \mathbb{R}^n$ al **poliedro** compuesto por la unión de todos los símplexes de K . Dando a cada símplex σ su topología natural como espacio de \mathbb{R}^n , decimos que un subconjunto A de $|K|$ es cerrado en $|K|$ si y solo si $A \cap \sigma$ es cerrado en σ , para todo σ en K . Esto define una topología sobre $|K|$.

Proposición 1.2.1. La topología del poliedro $|K|$ es más fina que la topología inducida como subespacio de \mathbb{R}^n . En caso de que K sea finito, ambas topologías son iguales.

Demostración. Si A es un conjunto cerrado de $|K|$ en la topología inducida por \mathbb{R}^n , entonces $A = B \cap |K|$ para algún conjunto cerrado $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Pero como $B \cap \sigma$

es cerrado en σ para todo σ , $A \cap \sigma$ también sería cerrado en σ y por tanto A sería cerrado en la topología del poliedro. En caso de que K sea finito, dado A cerrado en $|K|$ con la topología del poliedro, $A \cap \sigma$ es cerrado en σ y por tanto cerrado también en \mathbb{R}^n . Por tanto, A es una unión finita de cerrados de \mathbb{R}^n , por lo que A es también cerrado en \mathbb{R}^n .

Finalmente, para verificar que la topología del poliedro es más fina que la inducida por \mathbb{R}^n , basta con observar el siguiente ejemplo, tomando un complejo simplicial formado por infinitos símlices.

Ejemplo 4. Tomemos el complejo simplicial $K \subset \mathbb{R}^2$ formado por los infinitos 2-símlices σ_n generados por los vertices

$$a_0 = (0, 0), \quad a_n = \left(\cos \frac{\pi}{2^n}, \sin \frac{\pi}{2^n} \right), \quad a_{n+1} = \left(\cos \frac{\pi}{2^{n+1}}, \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \right),$$

para $n \geq 0$. El poliedro $|K|$ no es cerrado en la topología inducida por \mathbb{R}^2 ya que los puntos del segmento $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1\}$ son puntos límite de $|K|$, pero no pertenecen a la misma. Sin embargo, en la topología del poliedro, $|K|$ es cerrado por ser el total, algo que se puede verificar comprobando que para cada σ_n , $\sigma_n \cap |K| = \sigma_n$, cerrado en σ_n según la topología inducida por \mathbb{R}^2 .

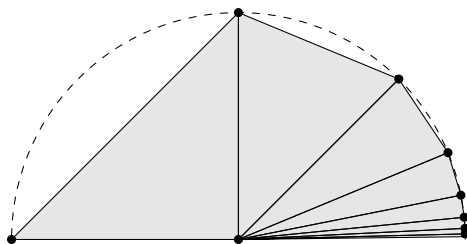


Figura 1.5: Complejo simplicial del Ejemplo 4.

□

Definición 1.2.5. Para todo punto de un poliedro $x \in |K|$, x pertenece al interior de un único símlice de vértices $V = \{a_0, \dots, a_n\}$, de forma que

$$x = \sum_{i=0}^n t_i a_i$$

con $t_i > 0$ para todo i , y $\sum t_i = 1$. Dado v un vértice de K , se define la **coordenada baricéntrica** t_v de x respecto a v fijando $t_v(x) = 0$ si $v \notin V$, y $t_v(x) = t_i$ si $v \in V$.

Proposición 1.2.2. Dado un complejo simplicial K , la topología del poliedro $|K|$ es Hausdorff.

Demostración. Dados dos puntos distintos del poliedro, $p \neq q$, $p, q \in |K|$, existe al menos un vértice para el cual $t_v(p) \neq t_v(q)$. En caso de que los puntos pertenezcan al interior de símlices distintos se puede tomar un v para el cual la coordenada de uno sea 0 pero la del otro no, y en caso de pertenecer al interior del mismo símlice, sus coordenadas han de ser diferentes porque las coordenadas baricéntricas determinan los puntos de forma única.

Por tanto, se puede tomar un radio r entre las dos coordenadas de forma que los conjuntos $\{x|t_v(x) < r\}$ y $\{x|t_v(x) > r\}$ sean dos abiertos disjuntos que contengan respectivamente a p y a q , siendo así el poliedro $|K|$ un espacio Hausdorff. \square

Proposición 1.2.3. *Un complejo simplicial K es finito si y solo si $|K|$ es compacto.*

Demostración. Si K es finito, como cada símlice σ es compacto por ser cerrado y acotado, $|K|$ está formado por una unión finita de subespacios compactos y por tanto es a su vez compacto.

Dado $|K|$ compacto supongamos que K está formado por un número infinito de símlices. Para cada símlice $\sigma \in K$ tomamos un punto $p_\sigma \in \text{Int } \sigma$ y formamos el conjunto $K' = \{p_\sigma\}$ formado por todos dichos puntos. Como K está formado por un número infinito de símlices, K' es infinito. La intersección de K' con cualquier símlice de K es un conjunto finito de puntos, luego K' es cerrado en $|K|$. Como es cerrado y discreto, B no tiene puntos límite, algo que contradice el hecho de ser un subconjunto infinito de un espacio compacto. \square

Proposición 1.2.4. *Sea K un complejo simplicial. Entonces $|K|$ es localmente conexo, salvo en los vértices que no estén unidos a ningún otro símlice.*

Demostración. Consecuencia directa de la Proposición 1.1.1 es que cada símlice es conexo por caminos, por lo que una unión de símlices que intersecan en al menos una cara o vértice también lo es. Como la topología de $|K|$ es más fina que la de R^n , todo conjunto que fuera abierto en R^n , también lo es en $|K|$.

Así, para cada $x \in |K|$ a excepción de los vértices sueltos, podemos coger una bola abierta n -dimensional B_n centrada en x de forma que $B_n \cap |K|$ es un abierto en $|K|$. Este abierto es conexo, luego tenemos que $|K|$ es localmente conexo. \square

Si bien la definición 1.2.1 nos da una vista geométrica del concepto de símlice, es algo engorrosa para trabajar con ella de forma combinatoria, por lo que será de utilidad presentar la siguiente definición.

Definición 1.2.6. Un **complejo simplicial abstracto** es una colección \mathcal{S} de conjuntos finitos no vacíos tales que si A es un elemento de \mathcal{S} entonces todo subconjunto no vacío de A también lo es.

Ejemplo 5. *Fijándonos en el complejo simplicial de la Figura 1.3 la colección \mathcal{S} sería:*

$$\mathcal{S} = \{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}\}$$

Definición 1.2.7. Al cambiar de la definición geométrica a la abstracta, es necesario redefinir ciertos conceptos vistos anteriormente.

1. Denominamos **símplices** a los elementos de \mathcal{S} .
2. La **dimensión** de un símplex es uno menos que su cardinal.
3. Todo subconjunto no vacío de un símplex A de \mathcal{S} es una cara de A .
4. El **conjunto de vértices** V de \mathcal{S} es la unión de todos los conjuntos de cardinal uno de \mathcal{S} .
5. Se denomina **subcomplejo** de \mathcal{S} a las subcolecciones de \mathcal{S} que sean a su vez complejos simpliciales abstractos.

Veamos ahora que las definiciones de complejo simplicial geométrico y abstracto son equivalentes. Para poder enunciar el teorema, es necesario definir primero lo que son dos complejos abstractos isomorfos, además de hacer una analogía de los vértices de un complejo geométrico a la forma de un complejo abstracto.

Definición 1.2.8. Sea K un complejo simplicial geométrico y V el conjunto de vértices de K . Sea \mathcal{K} la colección de todos los subconjuntos $\{a_1, \dots, a_n\}$ de V tales que los vértices a_1, \dots, a_n generen un símplex de K . Entonces llamamos **esquema de vértices** a la colección \mathcal{K} .

Los conjuntos simpliciales geométricos y abstractos son equivalentes y podemos trabajar con ellos de forma indistinta. Para probarlo vamos a ver primero tres lemas con los que definir aplicaciones simpliciales que nos ayudarán a la demostración del Teorema 1. Las demostraciones de todos ellos están basadas en las realizadas en [2].

Lema 1.2.1. *Una aplicación $f : |K| \rightarrow X$ es continua si y solo si $f|_\sigma$ es continua para todo $\sigma \in K$.*

Demostración. Si f es continua, $f|_\sigma$ también lo es ya que σ es un subespacio de K . Por otro lado, si $f|_\sigma$ es continua, para un cerrado C de X , $f^{-1}(C) \cap \sigma = (f|_\sigma)^{-1}(C)$, que es cerrado en σ por la continuidad de $f|_\sigma$. Por tanto, $f^{-1}(C)$ es cerrada en $|K|$ y f tiene que ser continua. \square

Lema 1.2.2. *Sean K y L dos complejos simpliciales y sea $f : K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$ una aplicación entre sus vértices. Si cuando los vértices v_0, \dots, v_n de K generan*

un símplice de K , los puntos $f(v_0), \dots, f(v_n)$ son vértices de un símplice de L , entonces f puede extenderse a una aplicación continua $g : |K| \rightarrow |L|$ de forma que

$$x = \sum_{i=0}^n t_i v_i \implies g(x) = \sum_{i=0}^n t_i f(v_i).$$

Demostración. Los vértices $f(v_i)$ no tienen por que ser diferentes, sin embargo, por hipótesis, siguen generando un símplice τ de L y como $g(x)$ es un punto de τ , significa que los coeficientes t_i no son negativos y suman 1. Por tanto, g transforma el símplice σ generado por los v_i de forma continua al símplice τ cuyo conjunto de vértices está formado por los $f(v_i)$. Tenemos que g es continua de σ a τ , luego es una aplicación continua entre σ y $|L|$ y por el Lema 1.2.1, g es continua como una aplicación entre $|K|$ y $|L|$. \square

Definición 1.2.9. Bajo las hipótesis del Lema 1.2.2, se dice que g es la **aplicación simplicial inducida** por la aplicación de vértices f .

Definición 1.2.10. Dos complejos simpliciales \mathcal{S} y \mathcal{T} son **isomorfos** si existe una aplicación simplicial biyectiva entre ambos.

Lema 1.2.3. *Dados dos complejos simpliciales K y L , y $f : K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$, una biyección que cumple que los vértices v_0, \dots, v_n de K generan un símplice de K si y solo si $f(v_0), \dots, f(v_n)$ generan un símplice de L . Entonces la aplicación simplicial inducida $g : |K| \rightarrow |L|$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Cada símplice σ de K se asocia por g en un símplice τ de L de la misma dimensión que σ . Basta con probar que la aplicación lineal $h : \tau \rightarrow \sigma$ inducido por la correspondencia de vértices f^{-1} es la inversa de la aplicación $g : \sigma \rightarrow \tau$. Si $x = \sum t_i v_i$, entonces $g(x) = \sum t_i f(v_i)$ por definición y por tanto

$$h(g(x)) = h\left(\sum t_i f(v_i)\right) = \sum t_i f^{-1}(f(v_i)) = \sum t_i v_i = x.$$

\square

Definición 1.2.11. La aplicación simplicial g se denomina **homeomorfismo simplicial**.

Teorema 1. *Teorema de equivalencia.*

1. *Todo complejo simplicial abstracto \mathcal{S} es isomorfo al esquema de vértices de algún complejo simplicial K .*
2. *Dos complejos simpliciales son linealmente independientes si y solo si sus esquemas de vértices son isomorfos como complejos simpliciales abstractos.*

Demostración. Para demostrar 1. y poder definir el isomorfismo que relaciona los vértices de un complejo, vamos a utilizar el concepto de complejo simplicial de dimensión infinita. Dado un conjunto de índices J , denotamos a este complejo Δ^J , formado por la colección de todos los símlices generados en un espacio de dimension igual al cardinal de J por todos los subconjuntos finitos de la base estándar del espacio $\{\epsilon_\alpha\}$. Δ^J es un complejo simplicial ya que dados dos símlices σ y τ de Δ^J , la unión de sus conjuntos de vértices es geoméricamente independiente y genera un símlice de Δ^J .

Una vez definido el concepto de complejo de dimensión infinita, sea \mathcal{S} un complejo simplicial abstracto, con conjunto de vertices V . Tomando como conjunto de índices $J = V$ existirá una función inyectiva $f : V \rightarrow \{\epsilon_\alpha\}_{\alpha \in J}$. Se puede entonces especificar un subcomplejo K de Δ^J que cumpla que para cada símlice abstracto $\{a_0, \dots, a_n\} \in \mathcal{S}$, el símlice geométrico generado por $f(a_0), \dots, f(a_n)$ esté contenido en K . K es un complejo simplicial y f es el isomorfismo que relaciona el conjunto de vértices de K con \mathcal{S} .

La demostración 2. es consecuencia directa del Lema 1.2.3. □

1.3. Triangulaciones

Los poliedros son espacios sencillos sobre los cuales vamos a poder construir la homología simplicial. Para trabajar también con espacios homeomorfos a poliedros introducimos el concepto de triangulación.

Definición 1.3.1. Una **triangulación** (K, f) de un espacio topológico X es la tupla formada por un complejo simplicial K y el homeomorfismo $f : |K| \rightarrow X$. Se dice que un espacio X es triangulable si existe algún complejo simplicial para el cual existe un homeomorfismo entre $|K|$ y X .

Para simplificar el cálculo de triangulaciones podemos usar el resultado del Teorema 1 para trabajar directamente con complejos simpliciales abstractos.

Definición 1.3.2. Dado un complejo simplicial abstracto \mathcal{S} isomorfo al esquema de vértices de un complejo simplicial K , decimos que K es la **realización geométrica** de \mathcal{S} .

A modo de ejemplo, vamos a realizar las tres triangulaciones clásicas de la esfera, el toro, y el plano proyectivo, a partir de complejos simpliciales abstractos. Estos son las piezas de el Teorema de Clasificación de Superficies, por lo que de estos ejemplos se puede deducir que cualquier superficie compacta sería triangulable.

Ejemplo 6. *El complejo simplicial K de la Figura 1.6a está formado por tres 2-símlices y sus caras formando un tetraedro, que es claramente homeomorfo a*

la esfera S^2 . Para simplificar la representación, también podemos hacer uso del diagrama de la Figura 1.6b, compuesto por un complejo simplicial L , cuyo espacio subyacente es un triángulo y un etiquetado particular de sus vértices. Este tipo de diagramas son una forma muy utilizada de representar complejos simpliciales abstractos. En este caso, representa el complejo simplicial abstracto \mathcal{S} formado por el conjunto de vértices $V = \{a, b, c, d\}$, y por los símlices $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$ y $\{b, c, d\}$, junto con todas sus caras.

El complejo simplicial abstracto \mathcal{S} es isomorfo al complejo K , por lo que especifica el mismo complejo, es decir, K es una realización geométrica de \mathcal{S} .

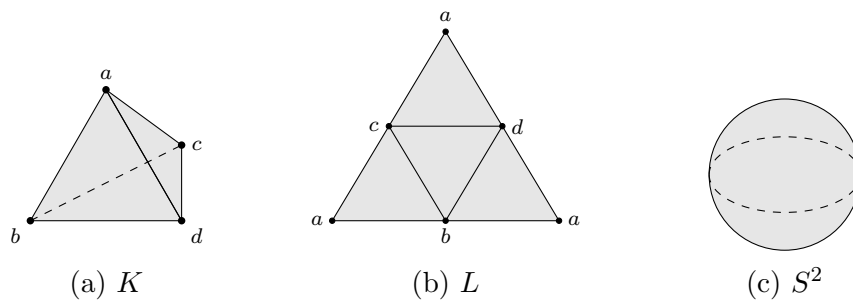


Figura 1.6: Triangulación de la esfera S^2 .

Ejemplo 7. Una posible triangulación del toro T^2 viene dada por la representación del complejo simplicial abstracto dada por el complejo L de la Figura 1.7. El espacio subyacente de L es un rectángulo, y utilizando la notación específica de vértices del diagrama se representa el complejo simplicial formado por 20 2-símlices, 36 1-símlices y 10 0-símlices, homeomorfo al toro T^2 .

Intuitivamente, el diagrama representa doblar el rectángulo uniendo los vértices con la misma etiqueta formando un cilindro, y posteriormente unir los dos extremos del cilindro entre sí para formar el toro.

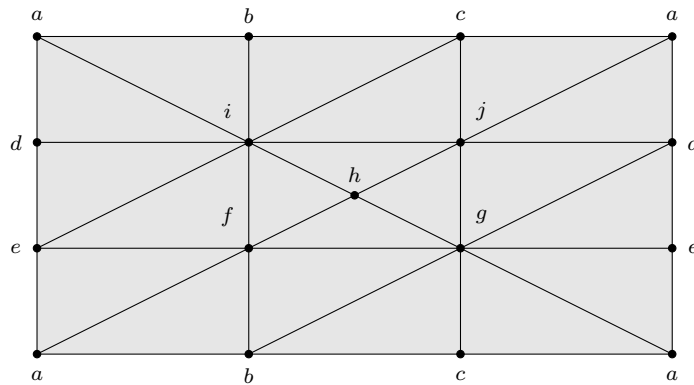


Figura 1.7: Triangulación del toro T^2 .

Ejemplo 8. Utilizando un diagrama similar al del ejemplo anterior, pero renombrando los vértices como indicado en la Figura 1.8, el diagrama representa ahora un complejo simplicial diferente al anterior, que es homeomorfo al plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$.

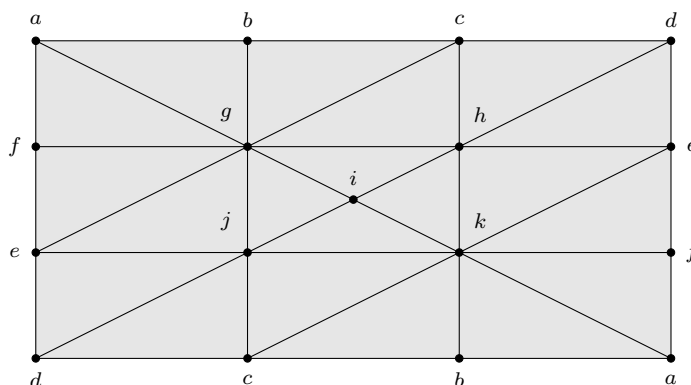


Figura 1.8: Triangulación del plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$.

Los complejos simpliciales son una herramienta potente para trabajar con multitud de espacios, sin embargo, no todos los espacios son triangulables, y por ende homeomorfos al poliedro de un complejo, como ilustran los siguientes ejemplos.

Ejemplo 9. Un ejemplo clásico en topología para verificar que no todo espacio conexo es conexo por caminos es el denominado Seno del Topólogo. El Círculo de Varsovia consiste en unir ambos extremos del Seno del Topólogo con una curva, consiguiendo así la conexión por caminos. Una posible construcción del mismo vendría dada por

$$\mathbb{W} = \left\{ \left(x, \sin \left(\frac{\pi}{x} \right) \right) \mid 0 < x < 2 \right\} \cup \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\} \cup C,$$

donde C es una curva que une los puntos $(0, 0)$ y $(1, 0)$ sin intersecar con el resto del conjunto.

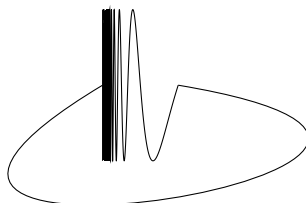


Figura 1.9: Círculo de Varsovia.

El Círculo de Varsovia tiene buenas propiedades a nivel global ya que es un

espacio métrico, compacto y conexo por caminos, sin embargo, no es localmente conexo en el segmento $\{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$ por lo que no puede ser homeomorfo a un poliedro. Para ver esto basta con comprobar que al tomar un entorno de cualquiera de los puntos del segmento lo suficientemente pequeño, cualquier conjunto abierto contenido en el entorno que contenga al punto va a contener también parte de la curva del seno, sin estar conectado con ella.

Para profundizar más en el Círculo de Varsovia véase [4].

Ejemplo 10. Otro espacio que puede parecer triangulable es el del pendiente Hawaiano. Este está formado por la unión infinita de círculos en \mathbb{R}^2 de centro $(\frac{1}{n}, 0)$ y radio $\frac{1}{n}$ para $n \in \mathbb{N}$ y viene dado por

$$\mathbb{H} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \right\}.$$

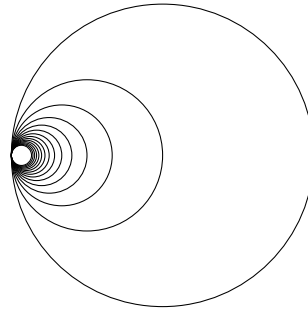


Figura 1.10: Los 20 círculos mas grandes del Pendiente Hawaiano.

Se puede comprobar que \mathbb{H} es un espacio métrico compacto, Hausdorff, conexo y localmente arcoconexo, sin embargo, no es homeomorfo a un poliedro como se muestra a continuación.

Supongamos que \mathbb{H} es un complejo simplicial. Como es compacto tendría que estar formado por un número finito de simplices $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, todos ellos conexos por caminos. Se puede observar que si un espacio es la unión de m componentes conexas por caminos, dicho espacio tendrá como mucho m componentes conexas por caminos. Sea ahora un punto $p \in \mathbb{H}$ y sea $\mathbb{H}_p = \mathbb{H} \setminus \{p\}$. Existe un único j tal que $p \in \sigma_j$. Si la dimensión de σ_j es 0, entonces $\mathbb{H}_p = \bigcup_{i \neq j} \sigma_i$, que tiene como mucho $n - 1$ componentes conexas por caminos. Si la dimensión es mayor que 0, entonces $\mathbb{H}_p = \bigcup_{i \neq j} \sigma_i \cup (\sigma_j \setminus \{p\})$. Si la dimensión es 1, $\sigma_j \setminus \{p\}$ tiene dos componentes arcoconexas y \mathbb{H}_p tendría a lo sumo $n + 1$. Si la dimensión de σ_j es mayor que 1, entonces $\sigma_j \setminus \{p\}$ sigue siendo arcoconexo y \mathbb{H}_p tendría a lo sumo n componentes conexas.

En definitiva, \mathbb{H}_p tendría en cualquier caso un número finito de componentes arcoconexas. Sin embargo, si tomamos $p = (0, 0) \in \mathbb{H}$, el punto donde se juntan

todos los círculos del Pendiente, \mathbb{H}_p tendría infinitas componentes arcoconexas, una por cada círculo del Pendiente, contradiciendo el hecho de tener un número finito de componentes arcoconexas como se ha visto antes.

Se puede encontrar más información acerca del Pendiente Hawaiano en [4] y en [5].

1.4. Categorías

La homología es una herramienta que nos permite realizar representaciones algebraicas de espacios topológicos. Este tipo de transformación se puede abordar de una forma más general como la transformación de un tipo de objeto en otro, transformando a su vez las funciones entre objetos del primer tipo, en funciones entre objetos del segundo. A los tipos de objetos, junto con las funciones entre si mismos, los llamaremos *categorías* y a las transformaciones entre unos tipos de objetos y otros y sus respectivas funciones, *functores*. Empecemos definiendo formalmente el concepto de categoría, siguiendo la estructura y notaciones de [6] y [3].

Definición 1.4.1. Una **categoría** \mathcal{C} consiste en

- Una clase de **objetos**.
- Para cada par de objetos X e Y , un conjunto $\text{hom}(X, Y)$ de **morfismos** de **dominio** X e **imagen** Y . Si $f \in \text{hom}(X, Y)$, escribiremos $f : X \rightarrow Y$.
- Para cada terna de objetos X, Y, Z , una función asociando al par de morfismos $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$, su **compuesto**

$$g \circ f : X \rightarrow Z.$$

Además, las categorías han de cumplir los siguientes dos axiomas:

- Asociatividad. Si $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, y $h : Z \rightarrow W$, entonces

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f : X \rightarrow W.$$

- Existencia de identidad. Para cada objeto Y , existe un morfismo $1_Y : Y \rightarrow Y$ que verifique que si $f : X \rightarrow Y$, entonces $1_Y \circ f = f$, y si $h : Y \rightarrow Z$, entonces $h \circ 1_Y = h$.

Ejemplo 11. Listamos a continuación varios ejemplos de categorías relacionadas con los temas de este trabajo, marcando los nombres espaciales de las equivalencias en cada uno de los ejemplos.

1. *La categoría de los conjuntos y funciones.*
2. *La categoría de los espacios topológicos y las funciones continuas. Con equivalencias denominadas homeomorfismos.*
3. *La categoría de los grupos y los homomorfismos. Con equivalencias como isomorfismos de grupos.*
4. *La categoría de los complejos simpliciales y las aplicaciones simpliciales. Con equivalencias como homeomorfismos simpliciales.*

Lema 1.4.1. *Si $f : X \rightarrow Y$ tiene una inversa por la izquierda y una inversa por la derecha, ambas son iguales y f es una equivalencia.*

El principal interés de formalizar el concepto de categoría es el poder asociar categorías entre sí, preservando las identidades y las composiciones. Para ello, se utilizan los morfismos entre categorías, denominados funtores.

Definición 1.4.2. Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} dos categorías. Un **functor** T de \mathcal{C} en \mathcal{D} consiste en una función de objetos que asigna a cada objeto X de \mathcal{C} un objeto $T(X)$ de \mathcal{D} y una función de morfismos que asigna a cada morfismo $f : X \rightarrow Y$ de \mathcal{C} un morfismo $T(f) : T(X) \rightarrow T(Y)$ de \mathcal{D} satisfaciendo que

- $T(1_X) = 1_{T(X)}$
- $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$

Ejemplo 12. *Un ejemplo elemental que se suele dar para visualizar de forma sencilla el concepto es el del functor olvidadizo. Este functor transforma la categoría de los espacios topológicos y funciones continuas a la categoría de los conjuntos y funciones, asignando a cada espacio topológico su conjunto subyacente. El nombre del functor viene del hecho de que al hacer la transformación, se pierden parte de la estructura y propiedades que otorgaba el espacio topológico. De la misma forma que a espacios topológicos, este functor se puede aplicar a otras categorías como la de los grupos o la de los anillos, quedándose con los elementos de estos como conjunto y olvidando el resto de propiedades.*

Es algo normal que en el proceso de transformación entre una categoría y otra se pierda parte de la información que otorgaba la categoría de origen, consiguiendo, a cambio, ganar simplicidad manteniendo ciertas estructuras de interés como las equivalencias de la categoría transformada.

Teorema 2. *Sea T un functor de una categoría \mathcal{C} a otra categoría \mathcal{D} . Entonces T relaciona equivalencias en \mathcal{C} a equivalencias de \mathcal{D} .*

Demostración. Sea $f : X \rightarrow Y$ una equivalencia en \mathcal{C} . Entonces $f^{-1} \circ f = 1_X$. Por tanto

$$1_{T(X)} = T(1_X) = T(f^{-1} \circ f) = T(f^{-1}) \circ T(f).$$

De la misma forma se tiene que $T(f) \circ T(f^{-1}) = 1_{T(Y)}$. Por tanto, $T(f^{-1})$ es una inversa por la izquierda y por la derecha de $T(f)$, y $T(f)$ es una equivalencia en \mathcal{D} . \square

Esta propiedad, junto con el hecho de que los funtores pueden ayudar a simplificar el objeto sobre el cual se quiere trabajar, hacen que su uso sea una herramienta clave en distintas ramas de las matemáticas. La Topología Algebraica es el estudio de los funtores entre la categoría de los espacios topológicos y las funciones continuas y algún tipo de categoría algebraica, como la de los grupos abelianos y los homomorfismos.

2

El grupo fundamental

Una de las herramientas que primero se suelen ver en el estudio de la Topología Algebraica son los grupos de homotopía y en particular, el grupo fundamental. Intuitivamente, este crea una imagen algebraica de un espacio topológico a partir de los bucles de curvas que empiezan y acaban en un punto fijo que se pueden formar en dicho espacio. En este capítulo abordamos detenidamente el grupo fundamental, para más adelante poder estudiar la relación de este con el primer grupo de Homología.

En la Sección 2.1 vamos a introducir los conceptos necesarios para poder definir el grupo. A modo de ejemplo, en la Sección 2.2 calculamos el grupo fundamental de la topología inducida en una circunferencia por \mathbb{R}^2 , obteniendo un grupo cíclico infinito, isomorfo al grupo de los enteros \mathbb{Z} con la suma. Finalmente acabamos el capítulo probando en la Sección 2.3 las propiedades functoriales del grupo fundamental.

Las definiciones y resultados de esta sección están basadas en las de [7] y [8]. No es el objetivo de este trabajo profundizar en tecnicismos sobre otros grupos de homotopía de orden superior, si de desea profundizar más en el tema y obtener una buena intuición geométrica se puede consultar el Capítulo 1 de [7].

2.1. Definiciones

De la misma forma que Poincaré en su día, se puede definir el grupo fundamental en función de bucles y deformaciones de bucles. O, de forma más genérica, caminos y sus deformaciones.

Definición 2.1.1. Un **camino** en un espacio X es una aplicación continua $f : I \rightarrow X$ donde I es el intervalo unidad $[0, 1]$.

Definición 2.1.2. Una **homotopía** de caminos en X es una familia de aplicaciones $f_t : I \rightarrow X, 0 \leq t \leq 1$, tal que

- Los extremos $f_t(0) = x_0$ y $f_t(1) = x_1$ son independientes de t .
- La aplicación asociada $F : I \times I \rightarrow X$ definida por $F(x, t) = f_t(x)$ es continua.

Cuando dos caminos f_0 y f_1 están conectados de esta forma mediante una homotopía f_t , se dice que son caminos **homotópicos** y se denota $f_0 \sim f_1$. Se puede probar que la relación de homotopía entre caminos con extremos fijos en cualquier espacio es una relación de equivalencia, y a la clase de un camino f bajo dicha relación se denota $[f]$ y se llama **clase de homotopía** de f .

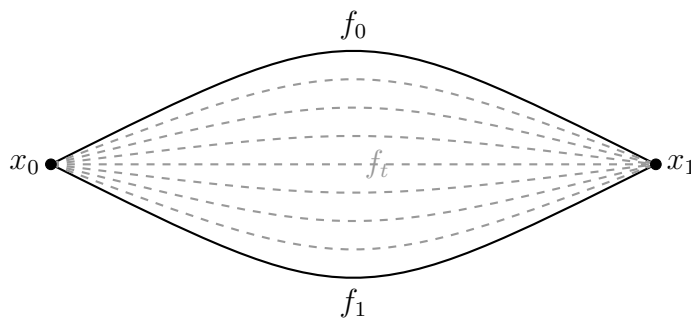


Figura 2.1: Diagrama de la homotopía f_t entre dos caminos f_0 y f_1 .

Lema 2.1.1. *La relación de homotopía entre caminos con extremos fijos en cualquier espacio es una relación de equivalencia.*

Demostración. Tenemos que verificar que tenemos una relación reflexiva, asociativa y transitiva:

- Tomando la homotopía constante $f_t = f$ se tiene que $f \sim f$, satisfaciendo la propiedad reflexiva.

- Si $f_0 \sim f_1$ entonces tomando la homotopía f_{1-t} tenemos $f_1 \sim f_0$ verificando la simetría.
- Finalmente, para la transitividad, si $f_0 \sim f_1$ y si, tomando $f_1 = g_0$, se tiene $g_0 \sim g_1$, podemos definir la homotopía h_t mediante su aplicación asociada $H(x, t) = F(x, 2t)$, si $t \in [0, 1/2]$ y $H(x, t) = G(x, 2t - 1)$ si $t \in [1/2, 1]$, donde F y G son las aplicaciones asociadas a f_t y g_t respectivamente. Como H es continua en $I \times [0, 1/2]$ y en $I \times [1/2, 1]$, es continua en $I \times I$ y se tiene $f_0 \sim g_1$.

□

Podemos formalizar la construcción utilizada en el último paso de la demostración anterior definiendo la *composición de caminos*.

Definición 2.1.3. Dados dos caminos $f, g : I \rightarrow X$ tales que $f(1) = g(0)$, se define el operador **composición** $f \circ g$ que recorre primero f y luego g , definida por la fórmula

$$f \circ g(x) = \begin{cases} f(2x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ g(2x - 1), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Definición 2.1.4. A el caso particular de los caminos $f : I \rightarrow X$ que empiezan y acaban en el mismo punto, $f(0) = f(1) = x_0 \in X$, se les denomina **bucles** y el punto común de inicio y final x_0 se denomina **punto base**. El conjunto de todas las clases de homotopía $[f]$ de bucles $f : I \rightarrow X$ en el punto base x_0 se denota $\pi_1(X, x_0)$ y se puede demostrar que es un grupo respecto al producto $[f][g] = [f \circ g]$. Este es el primer grupo de homotopía, el **grupo fundamental**.

Proposición 2.1.1. *El grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ es un grupo respecto al operador composición $[f][g] = [f \circ g]$.*

Demostración. Primero verificamos que la operación composición es cerrada y esta por tanto bien definida. Si tenemos que $[f_0] = [f_1]$ y que $[g_0] = [g_1]$ significa que $f_0 \sim f_1$ y que $g_0 \sim g_1$. Por tanto, si tenemos que $f_0 \sim g_0$ y por tanto $f_0(1) = g_0(0)$ entonces la composición de funciones está bien definida y tenemos que $f_1 \sim g_1$. Por tanto, $[f_0 \circ g_0] = [f_1 \circ g_1]$.

Dados los bucles f, g y h , basta ver que $f \circ (g \circ h)$ es una reparametrización de $(f \circ g) \circ h$, por lo que se tiene entonces que $[f \circ (g \circ h)] = [(f \circ g) \circ h]$.

Tomando como elemento neutro e el bucle constante en el punto x_0 , tal que $e_t(x) = x_0$ tenemos que dado un bucle cualquiera f , $[f][e] = [f \circ e] = [f]$ y $[e][f] = [e \circ f] = [f]$.

Como elemento inverso basta tomar, para cada bucle f , el bucle $f^{-1} = f(x - 1)$, obteniendo así que $[f][f^{-1}] = [f \circ f^{-1}] = [e]$. □

2.2. Grupo fundamental de la circunferencia

A diferencia de los grupos de homología que veremos más adelante, no existe una forma procedimental de calcular los grupos de homotopía, y en particular del grupo fundamental. En esta sección vamos a calcular el grupo fundamental de S^1 a modo de ejemplo elemental, para ilustrar lo trabajoso que pueden llegar a ser los grupos de homotopía.

Vamos a ver que $\pi_1(S^1)$ es un grupo generado por la clase del bucle $\omega(x) = (\cos 2\pi x, \text{sen } 2\pi x)$ con punto base en $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$. Nótese que $[\omega]^n = [\omega_n]$ con $\omega_n(x) = (\cos 2\pi nx, \text{sen } 2\pi nx)$ con $n \in \mathbb{Z}$. La idea de la demostración consiste en probar que cada bucle en S^1 es homotópico a ω_n para un único $n \in \mathbb{Z}$. Para ello vamos a empezar definiendo qué significa que un espacio sea un *recubridor* de otro.

Definición 2.2.1. Dado un espacio X , un **espacio recubridor** de X consiste en un espacio \tilde{X} y una aplicación $\rho : \tilde{X} \rightarrow X$ que verifica que para cada $x \in X$ existe un entorno abierto U de $x \in X$ tal que

$$\rho^{-1}(U) = \bigcup_j \tilde{U}_j$$

con los \tilde{U}_j abiertos y disjuntos y para cada \tilde{U}_j la aplicación $\rho|_{\tilde{U}_j} : \tilde{U}_j \rightarrow U$ es un homeomorfismo.

Para nuestro cálculo vamos a utilizar los dos siguientes resultados sobre recubridores. Estos se pueden generalizar y demostrar conjuntamente, como se ve en la Sección 1.1 de [7]. En este trabajo nos limitaremos a enunciarlos. En ambos, sea $\rho : \tilde{X} \rightarrow X$ un recubridor de X .

Lema 2.2.1. *Para cada camino $f : I \rightarrow X$ con $f(0) = x_0 \in X$ y para cada $\tilde{x}_0 \in \rho^{-1}(x_0)$ existe una única aplicación $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$ tal que $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$ y $\rho(\tilde{f}(x)) = f(x)$.*

Lema 2.2.2. *Para cada homotopía $f_n : I \rightarrow X$ de caminos con $f_t(0) = x_0 \in X$ y para cada $\tilde{x}_0 \in \rho^{-1}(x_0)$ existe una única homotopía $\tilde{f}_n : I \rightarrow \tilde{X}$ tal que $\tilde{f}_n(0) = \tilde{x}_0$ y $\rho(\tilde{f}_n(x)) = f_n(x)$.*

Teorema 3. *El grupo fundamental de la circunferencia es un grupo cíclico generado por un solo elemento, es decir, $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.*

Demostración. Sea $\rho : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ un recubridor de S^1 con $\rho(x) = (\cos 2\pi x, \text{sen } 2\pi x)$. Dado $\tilde{\omega}_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ con $\tilde{\omega}_n(x) = nx$ se tiene que $\omega_n = \rho\tilde{\omega}_n$.

Sea ahora $f : I \rightarrow S^1$ un bucle con el punto base $x_0 = (1, 0)$, un elemento cualquiera de $\pi_1(S^1, x_0)$. Por el Lema 2.2.1 existe \tilde{f} con $\tilde{f}(0) = 0$ y $f(x) = \rho(\tilde{f}(x))$. Como $\rho(\tilde{f}(1)) = f(1) = x_0$ y $\rho^{-1}(x_0) = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, se tiene que $\tilde{f}(1) = n$. Pero

tenemos que $\tilde{\omega}$ es otro camino que empieza en 0 y acaba en n , por lo que se tiene $\tilde{f} \sim \tilde{\omega}_n$ mediante la homotopía $(1-t)\tilde{f} + t\tilde{\omega}_n$. Por tanto, componiendo dicha homotopía con ρ , se tiene que $f \sim \omega_n$ y por tanto $[f] = [\omega_n]$.

Nos falta comprobar que dicha n se determina únicamente mediante f , por lo que para ello vamos a suponer que $f \sim \omega_n$ y que $f \sim \omega_m$. Sea f_t una homotopía de $\omega_m = f_0$ a $\omega_n = f_1$. Por el Lemma 2.2.2 existe una homotopía \tilde{f} con $\tilde{f}(0) = 0$ y $\rho(\tilde{f}_n(x)) = f_n(x)$. Por la unicidad que nos garantiza el Lema 2.2.1 tenemos que $\tilde{f}_0 = \tilde{\omega}_m$ y $\tilde{f}_1 = \tilde{\omega}_n$. Como \tilde{f}_t es una homotopía de caminos el punto $\tilde{f}_t(1)$ no depende de t , y como para $t = 0$, $\tilde{f}_0(1) = m$ y para $t = 1$, $\tilde{f}_1(1) = n$, se verifica $m = n$. \square

2.3. Functorialidad del grupo fundamental

En esta sección vamos a ver que el grupo fundamental es un functor de la categoría de la tupla de espacios topológicos con un punto (X, p) , con funciones continuas $f : (X, p) \rightarrow (Y, q)$ tales que $f(p) = q$ a la categoría de los grupos de bucles con un punto base $\pi_1(X, p)$.

Nótese el hecho de que no es posible trabajar con la categoría de los espacios topológicos sin tener que elegir un punto ya que el grupo fundamental de un espacio varía en función del punto base elegido, por lo que no es posible realizar una asignación $X \mapsto \pi_1(X)$ que verifique las propiedades functoriales.

El primer paso para formalizar la functorialidad es describir el morfismo al cual se transforma cada función continua de la categoría de los espacios topológicos con un punto.

Definición 2.3.1. Dada una aplicación continua entre espacios topológicos $f : X \rightarrow Y$, definimos el **homomorfismo (homotópico) inducido** por f como

$$\begin{aligned} f_* : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(Y, f(x_0)) \\ [\gamma] &\longmapsto f_*[\gamma] = [f \circ \gamma]. \end{aligned}$$

Lema 2.3.1. *El homomorfismo inducido f^* está bien definido y es efectivamente un homomorfismo de grupos.*

Demostración. Para verificar que f^* está bien definido vemos que si γ es un bucle, entonces $f \circ \gamma$ es también un bucle, por lo que entonces se tiene que si $[\gamma_0] = [\gamma_1]$, entonces $\gamma_0 \sim \gamma_1$, y por tanto $f \circ \gamma_0 \sim f \circ \gamma_1$ y se tiene $[f \circ \gamma_0] = [f \circ \gamma_1]$.

Puesto que la composición de caminos es distributiva con la composición de funciones continuas, se tiene que, dados dos bucles γ, δ

$$f_*([\gamma][\delta]) = f_*[\gamma \circ \delta] = [f \circ \gamma \circ \delta] = [(f \circ \gamma) \circ (f \circ \delta)] = [f \circ \gamma][f \circ \delta] = f_*[\gamma] \circ f_*[\delta],$$

por lo que f_* es un homomorfismo de grupos. \square

Una vez hemos definido el homomorfismo al cual transformar las funciones continuas de los espacios topológicos, basta con verificar que dicho homomorfismo inducido satisface las propiedades de functorialidad.

Teorema 4. *La aplicación identidad $i : (X, p) \rightarrow (X, p)$ induce el homomorfismo identidad $i_* : \pi_1(X, p) \rightarrow \pi_1(X, p)$. Si $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ son aplicaciones continuas, entonces $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.*

Demostración. Para la identidad, $i_*[\gamma] = [i_* \circ \gamma] = [\gamma]$, por lo que $i_* = i$. Para la segunda propiedad tenemos que para todo $[\gamma] \in \pi_1(X, p)$,

$$g_* \circ f_* \gamma = g_*(f_* \gamma) = g_* [f \circ \gamma] = [g \circ f \circ \gamma] = [(g \circ f) \circ \gamma] = (g \circ f)_* \gamma,$$

por lo que $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. \square

3

Homología en complejos simpliciales

Estamos ya en disposición de abordar el principal tema de este trabajo, los grupos de homología en complejos simpliciales. De forma intuitiva, los grupos de homología simpliciales son una sucesión de grupos que toman un espacio topológico triangulable y calculan el número de *agujeros* de las diferentes dimensiones del espacio. A nivel 0-dimensional, cuentan el número de componentes conexas del espacio, a nivel 1-dimensional el número de *agujeros* unidimensionales o *circulares*, a nivel 2-dimensional el número de *agujeros esféricos* y así sucesivamente.

Para ello, en la Sección 3.1 se introduce el concepto de orientación y de grupos de cadenas para acabar definiendo los grupos de homología simplicial. En la Sección 3.2 se calculan los grupos de homología de las superficies fundamentales a modo de ejemplos. En la Sección 3.3 verificaremos las propiedades functoriales de los grupos de homología para ver que forman un functor de la categoría de los complejos simpliciales a la de los grupos abelianos y en la Sección 3.4 veremos que este functor se puede extender y considerarse desde la categoría de los espacios topológicos, viendo así que los grupos de homología son un invariante topológico que no depende de la triangulación que tomemos de un espacio. Para concluir este trabajo, en la Sección ?? analizaremos la relación entre el grupo fundamental y el primer grupo de homología.

Las secciones de este Capítulo se basan, principalmente, en las definiciones y resultados de los Capítulos 1 y 2 de [2].

3.1. Definiciones

En esta sección introduciremos los símlices ordenados y los grupos de cadenas para acabar formalizando una definición de homología simplicial, acompañada de ejemplos sobre algunos de los complejos simpliciales vistos en el capítulo anterior para ayudar a ganar intuición y ayudar a entender el funcionamiento de los grupos de homología.

Definición 3.1.1. Dado un símlice σ , definimos que dos ordenamientos diferentes de sus vértices son equivalentes si difieren entre sí por una permutación par. Para $\dim \sigma > 0$, estos ordenamientos se clasifican en dos clases de equivalencia denominadas **orientaciones**. Llamamos **símlice ordenado** a la tupla de un símlice σ junto con una ordenación de σ . Decimos que un complejo simplicial está orientado si todas sus caras están orientadas.

Si σ es un 0-símlice entonces solo hay una clase y existe un único ordenamiento. Usaremos la notación $[v_0 \dots v_n]$ para denotar un símlice ordenado formado por el símlice de vértices $V = \{v_0, \dots, v_n\}$ y la clase de equivalencia del ordenamiento (v_0, \dots, v_n) .

Ejemplo 13. Para ordenar arbitrariamente el complejo simplicial K , homeomorfo al de la Figura 1.3, asignamos a cada uno de sus símlices la orientación definida por el orden lexicográfico de sus vértices, como muestra la Figura 3.1.

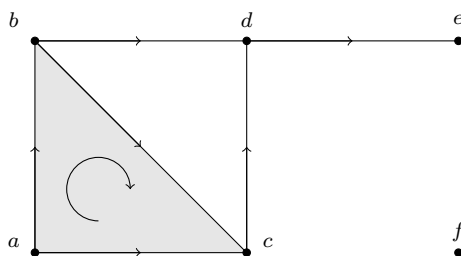


Figura 3.1: Complejo simplicial orientado.

Definición 3.1.2. Dado K un complejo simplicial, decimos que una **n-cadena** sobre K es una función c del conjunto de n-símlices ordenados de K a \mathbb{Z} , de forma que:

- $c(\sigma) = -c(\sigma')$ si σ y σ' son orientaciones opuestas de un mismo símlice.
- $c(\sigma) = 0$ para todos salvo para un número finito de n-símlices.

Podemos incorporar una operación de suma de n-cadenas sumando sus valores, formando el **grupo de n-cadenas orientadas** de K , denotado por $C_n(K)$. Si $n < 0$ o $n > \dim K$, $C_n(K)$ es el grupo trivial.

Definición 3.1.3. Dado un s3mplice ordenado σ , la **cadena elemental** c correspondiente a σ es la funci3n definida como:

- $c(\sigma) = 1$,
- $c(\sigma') = -1$ si σ' es la orientaci3n opuesta de σ ,
- $c(\tau) = 0$ para todos los dem3s s3mplices τ .

Para simplificar la notaci3n, utilizaremos el s3mbolo σ para denotar tanto a s3mplices, como a s3mplices ordenados y a la n -cadena elemental c correspondiente al s3mplice σ .

Hemos definido el grupo de cadenas como una funci3n con coeficientes en \mathbb{Z} , pero pod3amos haber elegido un espacio vectorial con otros coeficientes como por ejemplo en \mathbb{Z}_2 , como hacen en [9]. De esta forma simplificar3amos el concepto al no depender de la noci3n de s3mplice orientado ya que el opuesto de un elemento de \mathbb{Z}_2 es dicho elemento. En la Secci3n 3.2 haremos uso de esta idea para ayudarnos con el c3mputo de los grupos de homolog3a.

Lema 3.1.1. *Sea K un complejo simplicial orientado, entonces el grupo de n -cadenas $C_n(K)$ es un grupo abeliano libre. Se puede obtener un conjunto generador de $C_n(K)$ orientando cada n -s3mplice de K y usando su cadena elemental correspondiente como generador.*

Demostraci3n. Una vez los n -s3mplices de K han sido arbitrariamente orientados, cada n -cadena c puede escribirse de forma 3nica como la combinaci3n lineal finita

$$c = \sum_{i=0}^n n_i \sigma_i$$

con cada n_i entero y cada σ_i la correspondiente cadena elemental. La cadena c asigna el valor n_i al n -s3mplice orientado σ_i , el valor $-n_i$ a la orientaci3n contraria de σ_i , y el valor 0 a todos los n -s3mplices orientados no incluidos en el sumatorio. \square

Observaci3n 3.1.1. De la demostraci3n anterior tenemos que se pueden expresar los elementos del grupo de n -cadenas de un s3mplice K como

$$C_n(K) = \left\{ \sum_{i=0}^n n_i \sigma_i \mid \sigma_i \in K, \dim \sigma_i = n, n_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ejemplo 14. *Calculemos a modo de ejemplo los grupos no triviales de n -cadenas del complejo simplicial K de la Figura 3.1.*

- Para $n = 2$, si $g_2 \in C_2(K)$: $g_2 = n_1 [abc]$.

- Para $n = 1$, si $g_1 \in C_1(K)$: $g_1 = n_1 [ab] + n_2 [ac] + n_3 [cb] + n_4 [bd] + n_5 [cd] + n_6 [de]$.
- Y para $n = 0$, si $g_0 \in C_0(K)$: $g_0 = n_1 a + n_2 b + n_3 c + n_4 d + n_5 e + n_6 f$.

Definición 3.1.4. Dado un símlice orientado $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$ con $n > 0$ se define el **operador frontera** ∂_n como el homomorfismo

$$\begin{aligned} \partial_n : C_n(K) &\longrightarrow C_{n-1}(K) \\ \partial_n \sigma = \partial_n [v_0, \dots, v_n] &\longmapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n], \end{aligned}$$

donde \hat{v}_i denota que hay que quitar el vértice v_i . Para cadenas arbitrarias $c = \sum_{i=0}^n n_i \sigma_i \in C_n(K)$ el operador frontera se extiende de forma natural teniendo

$$\partial_n c = \sum_{i=0}^n n_i \partial_n \sigma_i.$$

Para $n = 0$ definimos $C_0(K)$ como el homomorfismo trivial que transforma el grupo de 0-cadenas $C_0(K)$ en el grupo trivial $\mathbf{0}$.

Lema 3.1.2. Dado $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$ una n -cadena y $\partial_n, \partial_{n-1}$, se tiene que

$$(\partial_{n-1} \circ \partial_n) \sigma = 0.$$

Demostración. Para demostrar el resultado basta hacer el cálculo directo utilizando la definición del operador frontera.

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n [v_0, \dots, v_n] = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_{n-1} [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] = \quad (3.1)$$

$$\sum_{j < i} (-1)^i (-1)^j [\dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots] + \sum_{j > i} (-1)^i (-1)^{j-1} [\dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots] \quad (3.2)$$

Los dos últimos sumatorios se anulan ya que al cambiar la posición de i y j en el segundo, este se convierte en el negativo del primero. \square

Definición 3.1.5. Dado K un complejo simplicial y ∂_n el operador frontera, definimos el n -ésimo **grupo de homología** de K como

$$H_n(K) = \text{Ker}(\partial_n) / \text{Im}(\partial_{n+1}).$$

Los elementos de H_n son las **clases de homología**, los elementos de $\text{Ker}(\partial_n)$ se denominan **ciclos** y los de $\text{Im}(\partial_n)$, **fronteras**. Si dos ciclos f y g son representantes de la misma clase de homología se dice que son **homólogos** y se denota $f \simeq g$.

Proposición 3.1.1. *El grupo de homología es un grupo abeliano y está bien definido.*

Demostración. Los elementos del grupo de homología son clases de cadenas y su operación la composición de dichas cadenas. Sea $H_n(K)$ el n -ésimo grupo de homología de un complejo simplicial K y sean $[g], [h] \in H_n(K)$ los representantes de dos de las clases del grupo.

Si tomamos $[g'], [h'] \in H_n(K)$ otros representantes de las mismas clases tendríamos que

$$[g'] + [h'] = [h' \circ g'] = [nh \circ mg] = [ng] + [mh] = n[g] + m[h] = [g] + [h],$$

por lo que la operación está bien definida. Tomando $[k] \in H_n(K)$ se verifica la propiedad asociativa

$$([g] + [h]) + [k] = [h \circ g] + [k] = [k \circ h \circ g] = [g] + [k \circ h] = [g] + ([h] + [k]).$$

La clase de la cadena nula, que incluye las 0-cadenas y todos los ciclos funciona como elemento neutro y para cada cadena $[g]$, su cadena inversa $[-g]$ funciona como elemento inverso. Como la composición de cadenas es conmutativa tenemos que el grupo de homología es un grupo abeliano bien definido. \square

El rango de los grupos de homología nos da información acerca del espacio analizado que puede interpretarse como el número de *agujeros* n -dimensionales en dicho espacio.

Definición 3.1.6. Dado un complejo simplicial K , y su n -ésimo grupo de homología $H_n(K)$, definimos el **n -ésimo número de Betti** como

$$\beta_n = \text{rango } H_n(K) = \text{rango Ker}(\partial_n) - \text{rango Im}(\partial_{n+1}).$$

Ejemplo 15. *Calculemos ahora los grupos de homología del complejo simplicial K de la Figura 3.1 empezando por $H_1(K)$.*

Si $h \in \text{Ker}(\partial_1)$, entonces $h = n_1[ab] + n_2[ac] + n_3[cb] + n_4[bd] + n_5[cd] + n_6[de]$ tal que $\partial_1(h) = n_1(b-a) - n_2(c-a) + n_3(b-c) - n_4(d-b) + n_5(d-c) - n_6(e-d) = 0$. De esto se deduce, renombrando apropiadamente, que $n_1 = n_2 = -n_3 = m_1$, $n_4 = n_5 = m_2$ y $n_6 = 0$, obteniendo $h = m_1([ab] + [ac] - [cb]) + m_2([bd] + [cd])$. Por tanto, $\text{Ker}(\partial_2)$ es un grupo libre de rango 2 isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

Si $g \in \text{Im}(\partial_2)$, entonces $g = \partial_2(n[abc]) = n([ab] - [ac] + [cb])$, luego $\text{Im}(\partial_2)$ es un grupo cíclico de rango 1, es decir, es un grupo isomorfo a \mathbb{Z} y tendríamos que

$$H_1(K) = \text{Ker}(\partial_1) / \text{Im}(\partial_2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}.$$

Para calcular $H_2(K)$ basta ver que $\text{Ker}(\partial_1)$ es el grupo trivial $\mathbf{0}$, puesto que para

$\partial_2(n[abc]) = n([ab] - [ac] + [cb]) = 0$ solo puede ser $n = 0$, por lo que $H_2(K)$ también es trivial. De la misma forma, se puede observar que

$$H_n(K) \cong \mathbf{0}, \quad n \geq 2.$$

Finalmente, para $H_0(K)$ tenemos que por definición $\partial_0(C_0(K)) = \mathbf{0}$ por lo que los elementos de $\text{Ker}(\partial_0)$ son todos los elementos de $C_0(K)$, es decir, todos los elementos de la forma $n_1a + n_2b + n_3c + n_4d + n_5e + n_6f$, por lo que $\text{Ker}(\partial_0) \cong \bigoplus_{i=1}^6 \mathbb{Z}$. Los elementos de $\text{Im}(\partial_1)$ son de la forma $n_1(b-a) + n_2(c-a) + n_3(c-b) + n_4(d-b) + n_5(d-c) + n_6(e-d)$. Es fácil ver que, por ejemplo, el tercer elemento equivale a la diferencia del primero con el segundo y que el cuarto elemento es la suma del tercero y el quinto menos el primero. Por tanto $\text{Im}(\partial_1) \cong \bigoplus_{i=1}^4 \mathbb{Z}$ y

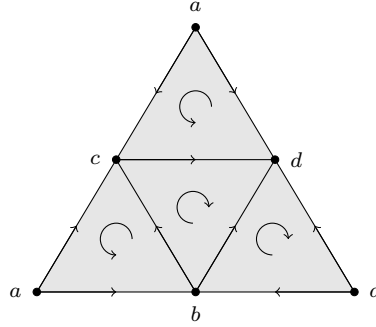
$$H_0(K) = \text{Ker}(\partial_0) / \text{Im}(\partial_1) \cong \bigoplus_{i=1}^6 \mathbb{Z} / \bigoplus_{i=1}^4 \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

El número de Betti de $H_1(K)$ es $\beta_1 = \text{rango } \mathbb{Z} = 1$, lo que se puede interpretar como que hay un agujero 1-dimensional en K , es decir, hay un ciclo no relleno formado por $[bc] + [cd] - [bd]$. Para $n \geq 2$, $\beta_n = 0$ puesto que no hay ningún agujero de dimensión igual o superior a la dimensión del complejo simplicial. La interpretación 0-ésimo número de Betti cambia ligeramente, dando información acerca del número de componentes conexas que tiene el espacio. Con $\beta_0 = 2$ sabemos que hay 2 componentes conexas diferentes, la del nodo f y la del resto del complejo simplicial.

3.2. Grupos de homología de superficies

En esta sección vamos a calcular los grupos de homología de las tres superficies clave del Teorema de clasificación de superficies compactas, con el fin de ganar algo de intuición sobre que la información que nos proporcionan los grupos de homología. Aprovecharemos, además, para mostrar alguna herramienta útil para agilizar el cómputo de los grupos.

Ejemplo 16. Grupos de homología de la esfera S^2 .


 Figura 3.2: Complejo simplicial orientado de la esfera S^2 .

Tomando como complejo simplicial la triangulación de S^2 vista en el ejemplo 6 y orientando adecuadamente cada uno de sus símplices como se puede ver en la Figura 3.2, estamos en disposición de calcular sus grupos de homología.

Para $H_1(S^2)$, los elementos de $\text{Ker}(\partial_1)$ son de la forma $n_1(b - a) + n_2(c - a) + n_3(d - a) + n_4(c - b) + n_5(d - b) + n_6(d - c) = -a(n_1 + n_2 + n_3) + b(n_1 - n_4 - n_5) + c(n_2 + n_4 - n_6) + d(n_3 + n_5 + n_6)$ e imponiendo $\partial_1(C_1(S^2)) = 0$ se ve que $n_1 = n_4 + n_5$, $n_2 = n_6 - n_1$ y $n_3 = -n_4 - n_6$, con lo que $\text{Ker}(\partial_1) \cong \oplus_{i=1}^3 \mathbb{Z}$. Los elementos de $\text{Im}(\partial_2)$ son de la forma $n_1([ab] - [ac] + [cb]) + n_2([ab] - [ad] + [db]) + n_3([ac] - [ad] + [dc]) + n_4([bc] - [bd] + [dc])$, donde el cuarto sumando se puede formar como la suma del primero más el tercero menos el segundo. Por tanto $\text{Im}(\partial_1) \cong \oplus_{i=1}^3 \mathbb{Z}$ y

$$H_1(S^2) = \text{Ker}(\partial_1) / \text{Im}(\partial_2) \cong \oplus_{i=1}^3 \mathbb{Z} / \oplus_{i=1}^3 \mathbb{Z} \cong \mathbf{0}.$$

Para $H_2(S^2)$, $\partial_2(n_1[abc] + n_2[abd] + n_3[acd] + n_4[bcd]) = (n_1 + n_2)[ab] + (-n_1 + n_3)[ac] - (n_2 + n_3)[ad] + (n_1 + n_4)[bc] + (n_2 - n_4)[bd] + (n_4 + n_4)[ab] = 0$ implica que $n_1 = -n_2 = n_3 = -n_4$. Renombrando, tenemos entonces que los elementos de $\text{Ker}(\partial_2)$ son de la forma $m([abc] - [abd] + [acb] - [bcd])$ y por tanto $\text{Ker}(\partial_2) \cong \mathbb{Z}$. $\text{Im}(\partial_3) \cong \mathbf{0}$ puesto que no hay ningún 3-símplice en el complejo simplicial, y por tanto

$$H_2(S^2) = \text{Ker}(\partial_2) / \text{Im}(\partial_3) \cong \mathbb{Z} / \mathbf{0} \cong \mathbb{Z}.$$

Como no hay ningún n -símplice para $n \geq 3$, se tiene que

$$H_n(S^2) \cong \mathbf{0}, \quad n \geq 3.$$

Para $H_0(S^2)$, $\text{Ker}(\partial_0) \cong \oplus_{i=1}^4 \mathbb{Z}$ ya que sus elementos son cualquier combinación de sus cuatro vértices. Los elementos de $\text{Im}(\partial_1)$ son de la forma $n_1(b - a) + n_2(c - a) + n_3(d - a) + n_4(c - b) + n_5(d - b) + n_6(d - c) = -a(n_1 + n_2 + n_3) + b(n_1 - n_4 - n_5) + c(n_2 + n_4 - n_6) + d(n_3 + n_5 + n_6)$, donde los tres últimos sumandos son combinaciones de los tres primeros teniendo $\text{Im}(\partial_1) \cong \oplus_{i=1}^3 \mathbb{Z}$. Así, tenemos

$$H_0(S^2) = \text{Ker}(\partial_0) / \text{Im}(\partial_1) \cong \oplus_{i=1}^4 \mathbb{Z} / \oplus_{i=1}^3 \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}.$$

El número de Betti $\beta_0 = 1$ nos indica que hay una única componente conexa, $\beta_1 = 0$ que no hay agujeros unidimensionales, y $\beta_2 = 1$ que hay un agujero bidimensional, el interior de la esfera. Para $n \geq 3$, $\beta_n = 0$, ya que no hay simplices de mas de 2 dimensiones.

Como se ha visto en el ejemplo anterior, basta con encontrar una triangulación adecuada y ponerse a hacer las cuentas para calcular los grupos de homología de un espacio. Sin embargo, estos cálculos se hacen bastante tediosos en cuanto la triangulación escogida contiene un mayor número de simplices. Una posible forma de abordar esto es cambiar el grupo en el cual trabajar, como comentábamos en la sección anterior. Al trabajar en \mathbb{Z}_2 podemos prescindir del concepto de orientación, perdiendo algo de información en el proceso, pero haciendo el cómputo más factible, al tratar únicamente matrices de ceros y unos. Esto hace, además, que sea sencillo calcular grupos de homología mediante el uso de una computadora.

Ejemplo 17. Grupos de homología de la esfera S^2 con coeficientes en \mathbb{Z}_2

Para calcular los grupos de homología de S^2 utilizando coeficientes en \mathbb{Z}_2 en el operador frontera tenemos la siguiente secuencia de espacios vectoriales y funciones lineales:

$$0 \rightarrow \mathbb{F}_2^4 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{F}_2^6 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{F}_2^4 \xrightarrow{\partial_0} 0,$$

donde

$$\partial_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \partial_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \partial_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculando los números de Betti como $\beta_n = \dim H_n(S^2) = \dim \text{Ker}(\partial_n) - \text{Im}(\partial_{n+1})$ podemos ver que se obtienen los mismos resultados que en el ejemplo anterior.

Ejemplo 18. Para calcular los grupos de homología del toro damos una orientación a la triangulación vista en el Ejemplo 7 y calculamos igual que antes. Para calcular $H_1(T^2)$ desarrollamos:

$$\begin{aligned} & \sigma_2(n_1[abd] + n_2[bdi] + n_3[bci] + n_4[cij] + n_5[acj] + n_6[adj] + \\ & n_7[ae f] + n_8[ab f] + n_9[bfg] + n_{10}[bcg] + n_{11}[ceg] + n_{12}[ace] + \\ & n_{13}[dei] + n_{14}[efi] + n_{15}[dgj] + n_{16}[deg] + \\ & n_{17}[fhi] + n_{18}[hij] + n_{19}[fgh] + n_{20}[ghj]) = \\ & n_1([ab] - [ad] + [bd]) + \\ & \dots + \\ & n_{20}([gh] - [gj] + [hj]), \end{aligned}$$

donde los 20 sumandos son linealmente independientes haciendo que $\text{Im}(\partial^2) \cong$

$\bigoplus_{i=1}^{20} \mathbb{Z}$. Para calcular $\text{Ker}(\partial_1)$ calculamos

$$\begin{aligned} & n_1(b-a) + n_2(c-a) + n_3(d-a) + n_4(e-a) + n_5(f-a) + n_6(g-a) + \\ & n_7(i-a) + n_8(j-a) + n_9(c-b) + n_{10}(f-b) + n_{11}(g-b) + n_{12}(i-b) + \\ & n_{13}(g-c) + n_{14}(i-c) + n_{15}(j-c) + n_{16}(e-d) + n_{17}(g-d) + n_{18}(i-d) + \\ & n_{19}(j-d) + n_{20}(f-e) + n_{21}(g-e) + n_{22}(i-e) + n_{23}(g-f) + n_{24}(h-f) + \\ & n_{25}(i-f) + n_{26}(h-g) + n_{27}(j-g) + n_{28}(i-j) + n_{29}(j-h) + n_{30}(j-i) = 0, \end{aligned}$$

obteniendo

$$\begin{aligned} n_1 &= n_9 + n_{10} + n_{11} + n_{12}, \\ n_2 &= -n_9 + n_{13} + n_{14} + n_{15}, \\ n_3 &= n_{16} + n_{17} + n_{18} + n_{19}, \\ n_4 &= -n_{16} - n_{20} + n_{21} + n_{22}, \\ n_5 &= -n_{10} - n_{20} + n_{23} + n_{24} + n_{25}, \\ n_6 &= n_{11} - n_{13} - n_{17} - n_{21} - n_{23} + n_{26} - n_{27}, \\ n_7 &= -n_{12} - n_{14} - n_{18} - n_{22} - n_{25} - n_{26} + n_{30}, \\ n_8 &= -n_{15} - n_{19} - n_{27} - n_{29} - n_{30}, n_i = n_i \quad \forall i \in [9, 30], \end{aligned}$$

haciendo así que $\text{Ker}(\partial_1) \cong \bigoplus_{i=1}^{22} \mathbb{Z}$. Por tanto, se tiene que

$$H_1(T^2) = \text{Ker}(\partial_1) / \text{Im}(\partial_2) \cong \bigoplus_{i=1}^{22} \mathbb{Z} / \bigoplus_{i=1}^{20} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

El resto de grupos se calculan de forma análoga, obteniendo

$$\begin{aligned} H_0(T^2) &\cong \mathbb{Z}, \\ H_2(T^2) &\cong \mathbb{Z} \text{ y} \\ H_n(T^2) &\cong \mathbf{0}, \quad n \geq 3. \end{aligned}$$

Ejemplo 19. Siguiendo el mismo procedimiento que en los ejemplos anteriores podemos calcular los grupos de homología del plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$ utilizando una orientación de la triangulación vista en el Ejemplo 8 para obtener:

$$\begin{aligned} H_0(\mathbb{R}P^2) &\cong \mathbb{Z}, \\ H_1(\mathbb{R}P^2) &\cong \mathbb{Z}_2, \text{ y} \\ H_n(\mathbb{R}P^2) &\cong \mathbf{0}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Se dice que los elementos de $H_1(\mathbb{R}P^2)$ tienen tensión de orden 2, puesto que forman un grupo de orden 2.

3.3. Functorialidad de la homología

Hasta ahora hemos visto que los grupos de homología transforman complejos simpliciales en grupos abelianos, permitiéndonos obtener propiedades de los mismos de forma algebraica. Aun así, aun no podemos afirmar que contamos con un functor entre categorías puesto que carecemos de una función de morfismos que pase de aplicaciones simpliciales a homomorfismos de grupos. En esta sección vamos a introducir este concepto, los homomorfismos inducidos por aplicaciones simpliciales, para poder acabar de denominar functor a la transformación dada al pasar entre complejos simpliciales y grupos de homología.

Definición 3.3.1. Sea $f : K \rightarrow L$ una aplicación simplicial. Si $[v_0 \dots v_n]$ es un símplice de K , los puntos $f(v_0), \dots, f(v_n)$ generan un símplice en L . Podemos definir un homomorfismo entre grupos de cadenas $(F_{\#})_p : C_n(K) \rightarrow C_n(L)$ definiéndolo en símplices ordenados de forma que

$$f_{\#}([v_0, \dots, v_n]) = \begin{cases} [f(v_0), \dots, f(v_n)] & \text{si } f(v_0), \dots, f(v_p) \text{ son distintos,} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La aplicación está bien definida ya que intercambiar dos vértices de $[v_0, \dots, v_n]$ cambia el signo de la segunda parte de la ecuación. Se denomina **cadena de aplicaciones simpliciales inducidas por la aplicación f** a la familia de homomorfismos $\{f_{\#}\}$, uno por cada dimensión.

Con el fin de simplificar la notación, hemos quitado el subíndice p , confiando en el contexto para aclarar cada caso.

Lema 3.3.1. *El homomorfismo $f_{\#}$ conmuta con el operador frontera ∂ , por lo que induce un homomorfismo de grupos de homología $f_* : H_n(K) \rightarrow H_n(L)$.*

Demostración. Hace falta probar que

$$\partial f_{\#}([v_0, \dots, v_n]) = f_{\#}(\partial [v_0, \dots, v_n]). \quad (3.3)$$

Dado τ el símplice de L generado por $f(v_0), \dots, f(v_n)$ podemos diferenciar tres casos:

1. Si $\dim \tau = n$, entonces todos los vértices $f(v_0), \dots, f(v_n)$ son distintos por

lo que

$$\begin{aligned} \partial f_{\#}([v_0, \dots, v_n]) &= \partial [f_{\#}(v_0), \dots, f_{\#}(v_n)] = \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i [f_{\#}(v_0), \dots, \hat{f}_{\#}(v_i), \dots, f_{\#}(v_n)] = \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i f_{\#}([v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]) = f_{\#}(\partial [v_0, \dots, v_n]). \end{aligned}$$

2. Si $\dim \tau \leq n - 2$, ambos lados de la ecuación 3.3 se anulan puesto que en ambos el número de vértices es mayor que la dimensión del símplice que generan, teniendo que haber algún vértice repetido.
3. Si $\dim \tau = n - 1$, podemos suponer que los vértices están ordenados de forma que $f(v_0) = f(v_1)$. Así pues, el lado izquierdo se anula y en el lado derecho, tras aplicar el operador frontera solo quedan los términos no nulos $[f(v_0), f(v_2), \dots, f(v_n)] - [f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)]$, que también se anulan puesto que $f(v_0) = f(v_1)$.

El homomorfismo $f_{\#}$ lleva los ciclos de K a los ciclos de L ya que si se tiene que $\partial c_n = 0$, entonces $\partial f_{\#}(c_n) = f_{\#}(\partial c_n) = 0$. Y $f_{\#}$ lleva las fronteras de K a las fronteras de L , ya que si $c_n = \partial d_{n+1}$, entonces $f_{\#}(c_n) = f_{\#}(\partial d_{n+1}) = \partial f_{\#}(d_{n+1})$. Por tanto, $f_{\#}$ induce un homomorfismo $f_* : H_n(K) \rightarrow H_n(L)$. \square

Teorema 5. *Sea $i : K \rightarrow K$ la aplicación simplicial identidad y sean $f : K \rightarrow L$ y $g : L \rightarrow M$ aplicaciones simpliciales. Entonces $i_* : H_n(K) \rightarrow H_n(K)$ es el homomorfismo identidad y $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.*

Demostración. Es automático por las definiciones que $i_{\#}$ es la identidad y que $(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}$. \square

Tenemos que el operador H_n asigna a cada complejo simplicial un grupo abeliano y, con el Teorema 5, hemos visto que el operador $*$ asigna, a cada aplicación simplicial entre complejos, un homeomorfismo entre los correspondientes grupos abelianos. Por tanto, tenemos que la tupla $(H_n, *)$ es un functor, ya verifica las propiedades vistas en la definición 1.4.2, que pasa de la categoría de los complejos simpliciales y aplicaciones simpliciales a la categoría de los grupos abelianos y homomorfismos.

3.4. Invarianza topológica de los grupos de homología

En esta sección vamos a completar la idea de functor vista en la sección anterior para poder afirmar que la homología es un functor, no ya entre complejos simpliciales, sino entre espacios topológicos (triangulables, puesto que estamos trabajando con homología simplicial) y grupos abelianos. Para ello es necesario probar que dado un espacio topológico, se obtienen los mismos grupos de homología independientemente de la triangulación del espacio que se tome. Los resultados de esta sección han sido simplificados de forma que se puedan abarcar sin la necesidad de muchos resultados previos indispensables para un acercamiento más formal. Por ello, se han simplificado ciertos casos en las demostraciones y se asumen varias propiedades de las definiciones sin una prueba formal. Empecemos definiendo el concepto de *estrella* de un vértice.

Definición 3.4.1. Dado v un vértice de K , la **estrella** de v en K , $St(v, K)$, o simplemente $St v$, es la unión del interior de los simplices de K que tienen a v como vértice.

El primer paso que vamos a dar es definir una aplicación ente complejos simpliciales que mantenga la estructura de los mismos haciendo que si una función continua entre espacios topológicos transforma la estrella de un vértice, entonces nuestra función simplicial entre los complejos de dichos espacios mantiene la estructura de la estrella.

Definición 3.4.2. Sea $h : |K| \rightarrow |L|$ una aplicación continua. Sea $f : K \rightarrow L$ una aplicación simplicial que cumple que para cada vértice v de K se tiene

$$h(St v) \subset St f(v).$$

La aplicación simplicial f se denomina **aproximación simplicial** a h

Lo siguiente que vamos a necesitar es una forma de poder dividir un complejo simplicial para, manteniendo la estructura del espacio subyacente, poder generar cuantos simplices deseemos en su interior. Para ello primeros definimos lo que es una *subdivisión* de un complejo.

Definición 3.4.3. Sea K un complejo simplicial. Se dice que K' es una **subdivisión de K** si se cumple que:

1. Todo símplice de K' está contenido en un símplice de K .
2. Todo símplice de K se puede expresar como la unión finita de simplices de K' .

Dado K un complejo simplicial, podemos tomar L_n una subdivisión del n -esqueleto de K , y σ_{n+1} un $n+1$ -símplice de K . Tenemos que la frontera de $\text{Bd } \sigma$ es un subcomplejo del p -esqueleto de K y, por tanto, también de L_n . Sea $w_\sigma \in \text{Int } \sigma$, entonces el complejo formado por el cono $w_\sigma * \text{Bd } \sigma$ es un complejo cuyo espacio subyacente es σ .

Definición 3.4.4. Se puede probar que $L_{n+1} = L_n \cup (w_\sigma * \text{Bd } \sigma)$ para todo $n+1$ -símplice σ , es un complejo simplicial, y se le denota la **subdivisión de $K^{(n+1)}$ obtenida estrellando L_n por los puntos w_σ** .

Este tipo subdivisiones dependen de los puntos elegidos, por lo que con la siguiente definición describimos los puntos medios de cada símplice, por los cuales queremos realizar las subdivisiones.

Definición 3.4.5. Dado un símplice $\sigma = v_0, \dots, v_n$, el **baricentro** de σ se define como el punto

$$\hat{\sigma} = \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} v_i.$$

O lo que es lo mismo, el punto de $\text{Int } \sigma$ para el cual todas sus coordenadas baricéntricas respecto a los vértices de σ son iguales.

Definición 3.4.6. Sea K un complejo simplicial. La secuencia de subdivisiones de esqueletos de K se define recursivamente como: $L_0 = K^{(0)}$, y L_{n+1} como la subdivisión del $p+1$ -esqueleto obtenido estrellando la subdivisión L_n con los baricentros de los $p+1$ -símplices de K . A L_n se le denota $\text{sd } K$ y se denomina primera **subdivisión baricéntrica**.

La segunda subdivisión baricéntrica equivale a $\text{sd}(\text{sd } K)$ y se denota $\text{sd}^2(K)$. Aplicando el operador sucesivamente de la misma forma obtenemos $\text{sd}^n(K)$.

Ejemplo 20. En la Figura 3.3 podemos ver como el operador de la primera subdivisión baricéntrica actúa sobre el complejo simplicial K homeomorfo al de la Figura 1.3.

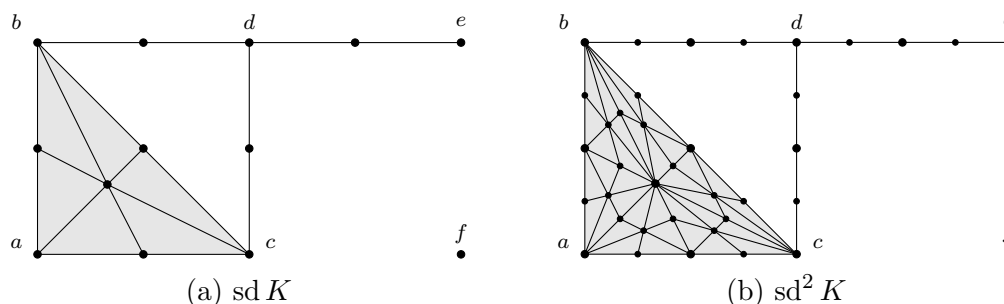


Figura 3.3: Subdivisiones baricéntricas.

Ya tenemos los elementos necesarios para poder demostrar que dada una aplicación continua entre espacios triangulables, siempre se puede formar una subdivisión del primero de forma que exista una aproximación simplicial entre los complejos simpliciales de ambos espacios. Esto es cierto en general, pero en este trabajo nos limitaremos a demostrarlo para complejos finitos. Para una demostración generalizada, véase la Sección 16 de [7].

Teorema 6 (Aproximación simplicial finita). *Sean K y L complejos simpliciales, con K finito. Dada una aplicación continua $h : |K| \rightarrow |L|$, existe una $N \in \mathbb{N}$ tal que h tiene una aproximación simplicial $f : \text{sd}^N K \rightarrow L$.*

Demostración. Podemos realizar un recubrimiento \mathcal{A} de $|K|$ formado por los conjuntos abiertos $h^{-1}(\text{St } w)$, para todos los vértices w de L . Supongamos que existe un número λ de forma que cualquier conjunto de diámetro menor que λ esté contenido en uno de los elementos de \mathcal{A} . Dicho número se denomina **número Lebesgue** de \mathcal{A} .

Si no existiera dicho λ , se podría tomar una secuencia de conjuntos C_n de modo que C_n tenga diámetro menor que $\frac{1}{n}$ pero que no estuviera contenido en ningún elemento de \mathcal{A} . Tomando $x_n \in C_n$, como el espacio métrico K es compacto, alguna sucesión x_{n_i} converge a un punto $x \in A$, para algún $A \in \mathcal{A}$. Pero como A es un abierto, contiene a C_{n_i} para algún i suficientemente grande, llegando a una contradicción.

Podemos elegir entonces una N de forma que cada símlice en $\text{sd}^N K$ tenga un diámetro menor que $\frac{\lambda}{2}$. Por tanto, la estrella de cualquier vértice en $\text{sd}^N K$ tiene diámetro menor que λ , por lo que está contenido en uno de los conjuntos de $h^{-1}(\text{St } w)$. Así pues, $h : |K| \rightarrow |L|$ satisface que $h(\text{St } v) \subset \text{St } f(v)$, por lo que existe la aproximación simplicial que buscábamos. \square

De la misma forma que en la Sección 3.3 probamos que existe un functor desde los complejos simpliciales a los grupos de homología, vamos a probar ahora que existe uno desde los espacios topológicos triangulables directamente. Nuestro homomorfismo en este caso, será una composición de una aproximación simplicial con el operador de subdivisión. Para generalizar estos resultados se puede definir dicho operador de forma algebraica, pero para nuestro caso nos es suficiente con la definición geométrica que hemos realizado.

Definición 3.4.7. Sean K y L complejos simpliciales y sea $h : |K| \rightarrow |L|$ una aplicación continua. Se elige una subdivisión K' de K , formada por el adecuado sd^N , tal que h tenga una aproximación simplicial $f : K' \rightarrow L$. Se define el **homomorfismo (homológico) inducido por h** ,

$$h_* : H_n(K) \rightarrow H_n(L),$$

mediante la ecuación $h_* = f_* \circ \text{sd}_*^N$.

Finalmente, probamos ahora que, efectivamente, este homomorfismo inducido tiene las propiedades factoriales necesarias.

Teorema 7. *La aplicación identidad $i : |K| \rightarrow |K|$ induce el homomorfismo identidad $i_* : H_n(K) \rightarrow H_n(K)$. Si $h : |K| \rightarrow |L|$ y $k : |L| \rightarrow |M|$ son aplicaciones continuas, entonces $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$.*

Demostración. Por definición, i_* es la identidad. Para demostrar la segunda afirmación tomamos, $f_0 : L' \rightarrow M$ y $g_0 : L' \rightarrow L$ como aproximaciones simpliciales de h y de $i_{|L|}$ respectivamente. Tomamos también $f_1 : K' \rightarrow L'$ y $g_1 : K' \rightarrow K$ como aproximaciones simpliciales de h y de $i_{|K|}$. Tenemos entonces que $f_0 \circ f_1$ es una aproximación simplicial de $k \circ h$ y por tanto

$$(k \circ h)_* = (f_0 \circ f_1)_* \circ (g_1)_*^{-1},$$

y como $g_0 \circ f_1$ es una aproximación simplicial de h se tiene que

$$h_* = (g_0 \circ f_1)_* \circ (g_1)_*^{-1} \text{ y } k_* = (f_0)_* \circ (g_0)_*^{-1}.$$

Combinando estas ecuaciones y aplicando el Teorema 5 obtenemos

$$(k \circ h)_* = k_* \circ h_*.$$

□

Corolario 3.4.1 (Invarianza topológica de los grupos de homología). *Si $h : |K| \rightarrow |L|$ es un homeomorfismo, entonces $h_* : H_n(K) \rightarrow H_n(L)$ es un isomorfismo.*

Demostración. Sea $k : |L| \rightarrow |K|$ la inversa de h . Por tanto $h_* \circ k_* = (i_{|L|})_*$ y $k_* \circ h_* = (i_{|K|})_*$. Por tanto, $h_* \circ k_*$ y $k_* \circ h_*$ son isomorfismos y h_* es un isomorfismo. □

Conclusiones

A lo largo de este trabajo se han introducido dos de los funtores principales de la Topología Algebraica, los grupos de homotopía, limitándonos al grupo fundamental, y los grupos de homología. Ambos sirven para encontrar invariantes topológicos que nos permitan diferenciar entre espacios, siéndonos de gran ayuda en la tarea de determinar si dos espacios son homeomorfos. De hecho, la homología y la homotopía están estrechamente relacionadas en dimensión 1, donde se puede comprobar que el *abelianizado* de $\pi_1(X)$ es isomorfo a $H_1(X)$. Este hecho parte de la idea de que una aplicación $f : I \rightarrow X$ se puede ver tanto como un camino o como un 1-símplice. Si f es un bucle con $f(0) = f(1)$, el 1-símplice es un ciclo puesto que $\sigma f = f(1) - f(0) = 0$.

Definición 3.4.8. Dado un grupo G , su **subgrupo conmutador** $[G, G]$, es el subgrupo generado por los elementos de la forma

$$[a, b] = aba^{-1}b^{-1}.$$

Se puede probar que $[G, G]$ es un subgrupo normal y que el cociente $G/[G, G]$ es abeliano. Dicho cociente se denomina **abelianizado** de G .

Teorema 8. *Considerando los bucles vistos en la Sección 2.1 como 1-ciclos se obtiene un homomorfismo $h : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$. Si X es conexo por caminos entonces h induce un isomorfismo del abelianizado de $\pi_1(X)$ en $H_1(X)$.*

Una demostración detallada de este Teorema se puede encontrar en la Sección 2.A de [7].

Hemos visto también que el grupo fundamental es dependiente del punto del espacio que se escoja como origen de los bucles, y que para poder realizar homología simplicial es necesario que el espacio en el que trabajemos sea triangulable. Esto resulta en que para espacios como los vistos en los Ejemplos 9 y 10 no se pueda calcular la homología simplicial de dichos espacios. Para solventar este problema, se puede definir una nueva teoría de homología denominada homología singular, la cual trabaja sobre espacios topológicos en general, sin necesidad de triangulaciones, haciendo que resulte mucho más *natural*. Una buena referencia para profundizar en ella es el Capítulo 4 de [2].

Tanto los grupos de homotopía como la homología simplicial tienen la desventaja de que no hay forma sencilla de calcular ambos invariantes en espacios arbitrarios. Sin embargo, se puede probar que los grupos de homología simplicial son computables para cualquier complejo simplicial finito, permitiendo calcularlos mediante un algoritmo, como se puede ver en la Sección 11 de [2].

Esto permite el desarrollo de técnicas aplicables a problemas reales, como la homología persistente, vista en [9], que consiste en computar los grupos de homología formados por nubes de puntos de datos. Variando un radio de dependencia entre los datos, se puede observar como aparecen y desaparecen *agujeros* en los mismos, consiguiendo así información sobre su estructura y distribución. Esta es una técnica fundamental en la disciplina de análisis de datos topológico como se puede ver en [10].

Bibliografía

- [1] J. Stillwell, “Poncaré and the early history of 3-manifolds,” *Bulletin of the American Mathematical Society*, 2012. [Online]. Available: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:46420070>
- [2] J. R. Munkres, *Elements of Algebraic Topology*. Westview Press, 1984.
- [3] E. H. Spanier, *Algebraic Topology*. McGraw-Hill, 1966.
- [4] L. A. Steen and J. A. Seebach, *Counterexamples in Topology*. Dover Publications, 1978.
- [5] S. Willard, *General Topology*. Addison-Wesley Publishing Company, 1970.
- [6] S. M. Lane, *Categories for the Working Mathematician*. Springer, 1998.
- [7] A. Hatcher, *Algebraic Topology*. Allen Hatcher, 2001.
- [8] V. Muñoz and J. J. Madrigal, *Topología Algebraica*. Sanz y Torres, 2015.
- [9] N. Otter, M. A. Porter, U. Tillmann, P. Grindrod, and H. A. Harrington, “A roadmap for the computation of persistent homology,” *EPJ Data Science*, 2017. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1140/epjds/s13688-017-0109-5>
- [10] L. Wasserman, “Topological data analysis,” 2016. [Online]. Available: <https://arxiv.org/abs/1609.08227>

